THESIS / THÈSE

MASTER EN SCIENCES MATHÉMATIQUES

Méthodes de décomposition en programmation mathématique convexe et généralisation à la résolution d'inéquations variationnelles

BAGGIO, Véronique

Award date:
1992

Awarding institution:
Universite de Namur

FACULTES UNIVERSITAIRES NOTRE-DAME DE LA PAIX
NAMUR
FACULTE DES SCIENCES

METHODES DE DECOMPOSITION EN PROGRAMMATION MATHEMATIQUE CONVEXE ET GENERALISATION A LA RESOLUTION D'INEQUATIONS VARIATIONNELLES

Promoteur : J.-J. STRODIOT

Véronique BAGGIO

Année académique : 1991-1992

Je tiens à remercier Monsieur le Professeur J.-J. STRODIOT pour la disponibilité qu'il a montrée durant l'élaboration de ce mémoire, ainsi que pour son aide et ses précieux conseils.

Je remercie aussi mes parents et tous ceux et celles qui m'ont encouragée ou soutenue pendant mes années d'études.

TABLE DES MATIERES

Notations

- Soit A une matrice.
  A' désigne sa transposée et A^{-1} son inverse.

- I représente la matrice identité.

- $||.||_2$ désigne la norme euclidienne.

- $[.]^+$ représente la projection sur l'ensemble X par rapport à la norme euclidienne.

- $[.]^+_G$ représente la projection sur l'ensemble X par rapport à la norme $||.||_G$, définie par $||z||_G = (z'Gz)^{1/2}$.

Chapitre 0

Introduction

La résolution de problèmes non linéaires apparaît dans beaucoup de contextes différents. Dans ce mémoire, nous nous limiterons à l'étude de deux types de problèmes non linéaires, à savoir les problèmes de programmation mathématique convexe, c'est-à-dire la minimisation d'une fonction convexe $F : I\!R^n \to I\!R$ sur un ensemble convexe, fermé et non vide, et les problèmes d'inéquation variationnelle, que nous pouvons voir comme des généralisations de problèmes d'optimisation sous contraintes.

Ces problèmes non linéaires sont typiquement résolus par des méthodes itératives. Dans ce travail, nous nous proposons d'en étudier quelques-unes et analysons leur convergence. Nous insistons sur les algorithmes qui conviennent à la mise en parallèle du calcul de la solution. Les problèmes de grande taille se résolvent aisément dans ce cas. Nous accordons une attention particulière aux ensembles contraintes qui sont des produits cartésiens car la mise en parallèle des calculs est alors tout à fait naturelle.

Dans le premier chapitre, nous considérerons les applications contractantes et les problèmes du point fixe. La théorie développée sera utilisée dans les chapitres suivants, notamment dans certaines démonstrations de résultats de convergence.

Dans le cadre de l'optimisation sous contraintes, nous traiterons, dans le deuxième chapitre, le problème de minimisation d'une fonction coût sur un ensemble convexe.

Ensuite, dans le troisième chapitre, nous analyserons des méthodes de décomposition de problèmes d'optimisation. En nous basant sur la théorie de la dualité, nous considérerons des transformations de problèmes d'optimisation, afin de faciliter leur résolution ou d'accroître les possibilités d'implémentation en parallèle.

Enfin, dans le dernier chapitre, nous étudierons des algorithmes qui permettent la résolution de problèmes d'inéquation variationnelle.

Pour l'étude de ces problèmes non linéaires, la référence est

"Parallel and distributed computation : Numerical methods", Dimitri P. Bertsekas, John N. Tsitsiklis, Prentice-Hall International Editions, 1989.

Chapitre 1

Applications contractantes

1.1 Définitions

Nous pouvons écrire un certain nombre d'algorithmes itératifs sous la forme

$$x(t+1) = T(x(t)) \qquad t = 0, 1, \cdots \tag{1.1}$$

où $T : X \subset I\!R^n \to X$ est une application qui vérifie la propriété suivante :

$$\exists \alpha \in [0,1) \text{ tel que } ||T(x) - T(y)|| \leq \alpha ||x - y|| \ , \quad \forall\, x, y \in X \ , \tag{1.2}$$

avec $||.||$ une certaine norme.

Une telle application est appelée une *application contractante* ou simplement une *contraction*, et l'itération (1.1) est une *itération contractante.*
Le scalaire α est appelé le *module* de T.

Remarque :

Toute application contractante est continue.

Soit donnée une application $T : X \to X$. Tout vecteur $x^* \in X$ satisfaisant $T(x^*) = x^*$ est appelé un *point fixe* de T.

Nous pouvons voir l'itération $x := T(x)$ comme un algorithme pour trouver un tel point fixe.
En effet, si la suite $\{x(t)\}$ converge vers $x^* \in X$ et si T est continue en x^*, alors x^* est un

point fixe de T.

Nous supposerons parfois qu'une application $T : X \rightarrow X$ possède un point fixe $x^* \in X$ et vérifie la propriété suivante :

$$\exists \alpha \in [0,1) \text{ tel que } ||T(x) - x^*|| \leq \alpha ||x - x^*|| \ , \ \forall \, x \in X \ . \tag{1.3}$$

Toute application T satisfaisant ces deux hypothèses est appelée une *pseudocontraction*, et l'itération correspondante $x := T(x)$ est appelée une *itération pseudocontractante*.
Le scalaire α est le *module* de T.

La condition (1.3) est évidemment plus faible que la condition de contraction (1.2).

Il se peut qu'une application T soit une contraction (ou une pseudocontraction) pour un certain choix de la norme vectorielle $||.||$, et en même temps ne le soit pas pour un choix différent de norme. Le choix approprié d'une norme revêt donc une importance primordiale.

Nous donnons maintenant la définition d'une norme particulièrement intéressante dans certains cas.
Supposons que X se décompose en un produit cartésien c'est-à-dire $X = \Pi_{i=1}^m X_i$ où chaque X_i est un sous-ensemble non vide de $I\!R^{n_i}$ et $n_1 + n_2 + \cdots + n_m = n$.
Tout vecteur x de X s'écrit alors sous la forme $x = (x_1, x_2, \cdots, x_m)$ avec chaque $x_i \in X_i$.
Supposons aussi qu'une norme $||.||_i$ sur $I\!R^{n_i}$ soit donnée pour tout i, et que $I\!R^n$ soit doté de la norme

$$||x|| = \max_i \ ||x||_i \ .$$

Cette dernière norme est appelée une *norme bloc-maximum.*

Soit $T : X \rightarrow X$ une contraction de module α, sous la norme bloc-maximum introduite ci-dessus. Une telle application est appelée une *bloc-contraction.*
Soit $T_i : X \rightarrow X_i$ le ième bloc de composantes de T, c'est-à-dire
$T(x) = (T_1(x), T_2(x), \cdots, T_m(x))$. Nous remarquons que

$$\begin{aligned} ||T_i(x) - T_i(y)||_i &\leq \max_j ||T_j(x) - T_j(y)||_j \\ &= ||T(x) - T(y)|| \leq \alpha ||x - y|| \ , \quad \forall \, x, y \in X, \ \forall \, i \ . \end{aligned}$$

1.2 Résultats généraux

Le résultat de base suivant montre qu'une contraction a un point fixe unique et que l'itération correspondante $x := T(x)$ converge vers lui.

<u>**Proposition 1.1 :**</u> *(Convergence des contractions)*

Soit X un sous-ensemble fermé de $I\!R^n$. Supposons que $T : X \to X$ est une contraction de module $\alpha \in [0, 1)$.
Alors :

a) L'application T a un unique point fixe $x^* \in X$.

b) Quel que soit le vecteur initial $x(0) \in X$, la suite $\{x(t)\}$ générée par l'itération $x(t+1) = T(x(t))$ converge linéairement vers x^*.

En particulier, $||x(t) - x^*|| \leq \alpha^t ||x(0) - x^*||\ , \quad \forall\, t \geq 0.$

<u>**Preuve :**</u>

a) Soit $x(0) \in X$ arbitraire.
Considérons la suite $\{x(t)\}$ générée par $x(t+1) = T(x(t))$.
T étant une contraction de module α par hypothèse, l'inégalité (1.2) est vérifiée, et nous avons

$$||x(t+1) - x(t)|| \leq \alpha ||x(t) - x(t-1)||\ , \quad \forall\, t \geq 1,$$

ce qui implique

$$||x(t+1) - x(t)|| \leq \alpha^t ||x(1) - x(0)||\ , \quad \forall\, t \geq 0\ .$$

Il suit que pour tout $t \geq 0$ et $m \geq 1$, nous avons

$$\begin{aligned} ||x(t+m) - x(t)|| &\leq \sum_{i=1}^{m} ||x(t+i) - x(t+i-1)|| \\ &\leq \alpha^t (1 + \alpha + \cdots + \alpha^{m-1}) ||x(1) - x(0)||\ . \end{aligned}$$

Par conséquent, la suite $\{x(t)\}$ est de Cauchy et doit donc converger (Prop. A.1 a)). Soit x^* sa limite.

En outre, comme X est fermé, x^* appartient à X (Prop. A.2).
Nous avons, pour tout $t \geq 1$,

$$\begin{aligned} ||T(x^*) - x^*|| &\leq ||T(x^*) - x(t)|| + ||x(t) - x^*|| \\ &\leq \alpha||x^* - x(t-1)|| + ||x(t) - x^*|| \,. \end{aligned}$$

Or $x(t)$ converge vers x^*. D'où $T(x^*) = x^*$, ce qui montre que la limite x^* de $x(t)$ est un point fixe de T.
Montrons que ce point fixe est unique. Supposons qu'il y ait un autre point fixe y^*. Alors, on a $||x^* - y^*|| = ||T(x^*) - T(y^*)|| \leq \alpha||x^* - y^*||$, ce qui implique que $y^* = x^*$.

b) Nous avons

$$\begin{aligned} ||x(t') - x^*|| &= ||T(x(t'-1)) - T(x^*)|| \\ &\leq \alpha||x(t'-1) - x^*|| \,, \quad \forall\, t' \geq 1 \end{aligned}$$

En appliquant cette relation successivement pour $t' = t, t-1, \cdots, 1$, nous obtenons

$$\begin{aligned} ||x(t) - x^*|| &\leq \alpha||x(t-1) - x^*|| \\ &\leq \alpha^2||x(t-2) - x^*|| \\ &\vdots \\ &\leq \alpha^t||x(0) - x^*|| \,, \quad \forall\, t \geq 0 \end{aligned}$$

■

Nous avons un résultat analogue pour les pseudocontractions.

Proposition 1.2 : *(Convergence des itérations pseudocontractantes)*

Soit X un sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}^n$. Supposons que $T : X \to X$ est une pseudocontraction de module $\alpha \in [0, 1)$, admettant le point fixe $x^* \in X$.
Alors :

a) L'application T n'admet pas d'autre point fixe.

b) Quel que soit le vecteur initial $x(0) \in X$, la suite $\{x(t)\}$ générée par l'itération $x(t+1) = T(x(t))$ converge linéairement vers x^*.
En particulier, $||x(t) - x^*|| \leq \alpha^t ||x(0) - x^*||$, $\forall\, t \geq 0$.

Afin d'appliquer un résultat tel que celui de la proposition 1.2, nous devons montrer que l'application T a un point fixe.
Dans certains cas, un résultat d'existence est obtenu de considérations purement topologiques.

Proposition 1.3 : *(Théorème du point fixe de Leray-Schauder-Tychonoff)*

Soit X un sous-ensemble de $I\!R^n$, non vide, convexe et compact.
Si $T : X \longrightarrow X$ est une application continue, alors :
Il existe $x^* \in X$ tel que $T(x^*) = x^*$.

Nous ne démontrons pas les propositions 1.2 et 1.3.

1.3 Quelques contractions utiles

Soit X un sous-ensemble fermé de $I\!R^n$ et supposons qu'il se décompose en un produit cartésien d'ensembles de plus petites dimensions $X_i \subset I\!R^{n_i}, i = 1, \cdots, m$.
Nous considérons une application $T : X \rightarrow I\!R^n$, dont le ième bloc de composantes T_i est de la forme

$$T_i(x) = x_i - \gamma G_i^{-1} f_i(x) \ ,$$

où $\forall\, i \ , \quad f_i : I\!R^n \rightarrow I\!R^{n_i} \ ,$

$\forall\, i$, G_i est une matrice symétrique inversible de dimensions (n_i, n_i) ,

γ est un scalaire.

Les applications de cette forme apparaissent couramment dans des méthodes itératives d'optimisation, dans la résolution de systèmes d'équations ou encore d'inéquations variationnelles (cfr chapitres suivants). Nous mentionnons ici des conditions suffisantes pour que de telles applications soient des bloc-contractions. Ces conditions seront invoquées plus tard afin d'établir la convergence de certaines méthodes itératives.

Avant de donner ces conditions suffisantes, fixons quelques notations.

Considérons le cas général où les blocs de composantes de f ont une dimension $n_i \geq 1$.
Notons $\nabla_j f_i(x)$ la matrice de dimensions (n_j, n_i) dont les éléments sont les dérivées partielles des composantes de f_i par rapport aux composantes du vecteur $x_j \in I\!R^{n_j}$.
En particulier, la $k$ème colonne de $\nabla_j f_i(x)$ est le vecteur gradient de la $k$ème composante de f_i, vue comme une fonction de x_j.

$\nabla_j f_i(x)$ étant une matrice, nous devons définir une norme matricielle, et choisissons celle induite par la norme vectorielle.
Pour être plus précis, soit pour tout $i, ||.||_i$ une norme arbitraire sur $I\!R^{n_i}$ et soit $||.||$ la norme bloc-maximum correspondante. A toute matrice A de dimensions (n_i, n_j), nous associons la norme matricielle induite

$$||A||_{ij} = \max_{x \neq 0} \frac{||Ax||_i}{||x||_j} = \max_{||x||_j = 1} ||Ax||_i \ .$$

Proposition 1.4 :

Supposons que X est convexe.
Si $f : I\!R^n \to I\!R^n$ est continûment différentiable, et s'il existe un scalaire $\alpha \in [0,1)$ tel que

$$||I - \gamma G_i^{-1}(\nabla_i f_i(x))'||_{ii} + \sum_{j \neq i} ||\gamma G_i^{-1}(\nabla_j f_i(x))'||_{ij} \leq \alpha \, , \quad \forall \, x \in X \quad , \forall \, i \, , \tag{1.4}$$

alors :
L'application $T : X \to I\!R^n$ définie par $T_i(x) = x_i - \gamma G_i^{-1} f_i(x)$ est une contraction par rapport à la norme bloc-maximum $||.||$.

Preuve :

Soient $x, y \in X$ arbitraires et soit i fixé. Définissons une fonction $g_i : [0,1] \to I\!R^{n_i}$ par

$$g_i(t) = tx_i + (1-t)y_i - \gamma G_i^{-1} f_i(tx + (1-t)y) \, .$$

Remarquons que g_i est continûment différentiable.
Soit $\frac{dg_i}{dt}$ le vecteur de longueur n_i composé des dérivées des composantes de g_i. Nous avons alors

$$\begin{aligned} ||T_i(x) - T_i(y)||_i &= ||g_i(1) - g_i(0)||_i = || \int_0^1 \frac{dg_i}{dt}(t) dt ||_i \\ &\leq \int_0^1 \left\| \frac{dg_i}{dt}(t) \right\| dt \leq \max_{t \in [0,1]} \left\| \frac{dg_i}{dt}(t) \right\|_i \, . \end{aligned}$$

Bornons la norme de $\frac{dg_i}{dt}$.

$$\begin{aligned} \left\| \frac{dg_i}{dt}(t) \right\|_i &= ||x_i - y_i - \gamma G_i^{-1}(\nabla f_i(tx + (1-t)y))'(x-y)||_i \\ &= ||[I - \gamma G_i^{-1}(\nabla_i f_i(tx + (1-t)y))'](x_i - y_i) \\ &\quad - \sum_{j \neq i} \gamma G_i^{-1}(\nabla_j f_i(tx + (1-t)y))'(x_j - y_j)||_i \\ &\leq ||I - \gamma G_i^{-1}(\nabla_i f_i(tx + (1-t)y))'||_{ii} ||x_i - y_i||_i \\ &\quad + \sum_{j \neq i} ||\gamma G_i^{-1}(\nabla_j f_i(tx + (1-t)y))'||_{ij} ||x_j - y_j||_j \\ &\leq \alpha \max_j ||x_j - y_j||_j \end{aligned}$$

en utilisant l'hypothèse (1.4) où x est remplacé par $tx + (1-t)y \in X$ car X convexe.

Nous obtenons donc

$$||T_i(x) - T_i(y)||_i \leq \alpha \max_j ||x_j - y_j||_j = \alpha ||x - y|| \; ,$$

ce qui établit la propriété de contraction. ∎

Généralement, la condition (1.4) est difficile à vérifier. Nous montrons dans la proposition suivante que si n_i vaut 1 pour tout i, alors cette condition se simplifie considérablement.

Proposition 1.5 :

Supposons que X est convexe, que n_i vaut 1 pour tout i et que $f : I\!R^n \rightarrow I\!R^n$ est de classe C^1.
De plus, supposons qu'il existe des constantes $K > 0$ et $\beta > 0$ telles que

$$\begin{aligned} &\nabla_i f_i(x) \leq K \; , \quad \forall\, x \in X, \; \forall\, i \; , \\ \text{et} \quad &\sum_{j \neq i} |\nabla_j f_i(x)| \leq \nabla_i f_i(x) - \beta \; , \quad \forall\, x \in X, \; \forall\, i \; . \end{aligned}$$

Alors :
L'application $T : X \rightarrow I\!R^n$ définie par $T(x) = x - \gamma G^{-1} f(x)$ est une contraction par rapport à la norme bloc-maximum, pourvu que $0 < \gamma < 1/K$.

Preuve :

Soit $x \in X$ arbitraire et soit i fixé. Nous avons

$$\begin{aligned} &|1 - \gamma \nabla_i f_i(x)| + \gamma \sum_{j \neq i} |\nabla_j f_i(x)| \\ &= 1 - \gamma(\nabla_i f_i(x) - \sum_{j \neq i} |\nabla_j f_i(x)|) \quad \text{car } \gamma < 1/K \text{ et } \nabla_i f_i(x) \leq K \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{par hypothèse} \\ &\leq 1 - \gamma_\beta < 1 \; . \end{aligned}$$

Ceci montre que l'inégalité (1.4) tient. Le résultat suit alors de la proposition 1.4. ∎

Le résultat suivant est basé sur un choix particulier de norme.

Uniquement dans un but de motivation, considérons pour l'instant le cas où il n'y a qu'un seul bloc de composantes et où l'application $T : X \rightarrow I\!R^n$ est donnée par

$$T(x) = x - \gamma G^{-1} f(x) , \quad \forall\, x \in X , \tag{1.5}$$

où G est une matrice symétrique et définie positive.
L'effet de G dans l'équation (1.5) est la mise à échelle de la direction dans laquelle x est modifié lorsque T est appliqué.

Il est donc raisonnable de considérer une norme qui met à échelle les composantes de x de façon correspondante.

A cet effet, nous introduisons la norme $||.||_G$, définie par

$$||x||_G = (x'Gx)^{1/2} ,$$

et cherchons des conditions sous lesquelles T est une contraction par rapport à cette norme.

Nous avons

$$\begin{aligned} ||T(x) - T(y)||_G^2 &= ((x-y) - \gamma G^{-1}(f(x) - f(y)))'G((x-y) \\ &\quad -\gamma G^{-1}(f(x) - f(y))) \\ &= ||x-y||_G^2 + \gamma^2 (f(x) - f(y))'G^{-1}(f(x) - f(y)) \\ &\quad -2\gamma(f(x) - f(y))'(x-y) , \end{aligned}$$

de sorte que si γ est choisi très petit, et si la norme de $f(x)-f(y)$ est de l'ordre de $||x-y||_G$, alors nous pouvons négliger le terme comprenant γ^2.
Nous voyons alors que pour que T soit une contraction, il est suffisant de supposer que γ est strictement positif et suffisamment petit et que

$$(f(x) - f(y))'(x-y) \geq \alpha ||x-y||_G^2 , \quad \forall\, x, y \in X , \tag{1.6}$$

où α est une constante strictement positive.

L'inégalité (1.6) est appelée une condition de *monotonicité forte*.
Nous reparlerons de cette condition dans le 4ème chapitre.

Retournons maintenant au cas général où $X = \Pi_{i=1}^m X_i \subset \Pi_{i=1}^m I\!R^{n_i}$, et où T est donnée par $T_i(x) = x_i - \gamma G_i^{-1} f_i(x)$, $\forall\, i$.

Supposons que chaque matrice G_i est symétrique et définie positive.
Pour tout i, nous définissons une norme $||.||_i$ sur $I\!R^{n_i}$ par

$$||x_i||_i = (x_i' G_i x_i)^{1/2} .$$

Ces normes définissent une norme bloc-maximum $||.||$ donnée par $||x|| = \max_i \ ||x_i||_i$.

Proposition 1.6 :

Considérons les normes $||.||_i$ et $||.||$ définies ci-dessus. Supposons que chaque G_i est symétrique et définie positive.
De plus, supposons qu'il existe des constantes A_1, A_2 et A_3 strictement positives avec $A_3 < A_2$ telles que $\forall\, i$ et $\forall\, x, y \in X$, nous avons

$$||f_i(x) - f_i(y)||_i \leq A_1 ||x - y|| \,, \qquad (1.7)$$

$$\text{et} \quad (f_i(x) - f_i(y))'(x_i - y_i) \geq A_2 ||x_i - y_i||_i^2 - A_3 ||x - y||^2 \,. \qquad (1.8)$$

Alors :
L'application $T : X \to I\!R^n$ définie par $T_i(x) = x_i - \gamma G_i^{-1} f_i(x)$ est une contraction par rapport à la norme bloc-maximum $||.||$, pourvu que $\gamma > 0$ est suffisamment petit.

Preuve :

G_i étant définie positive, il existe une constante $A_4 > 0$ telle que

$$x_i' G_i^{-1} x_i \leq A_4 x_i' G_i x_i \,, \quad \forall\, x_i \in I\!R^{n_i} . \qquad \text{(Prop. A.3 a))}$$

Supposons que $0 < \gamma < \frac{1}{2A_2}$.
Nous avons

$$\begin{aligned} ||T_i(x) - T_i(y)||_i^2 &= ||x_i - y_i||_i^2 + \gamma^2 (f_i(x) - f_i(y))' G_i^{-1} (f_i(x) - f_i(y)) \\ &\quad -2\gamma (f_i(x) - f_i(y))'(x_i - y_i) \\ &\leq ||x_i - y_i||_i^2 + A_1^2 A_4 \gamma^2 ||x - y||^2 - 2\gamma (A_2 ||x_i - y_i||_i^2 - A_3 ||x - y||^2) \end{aligned}$$

par les hypothèses (1.7), (1.8) et le fait que G_i est définie positive

$$\leq (1 - 2\gamma A_2 + A_1^2 A_4 \gamma^2 + 2\gamma A_3)||x - y||^2$$

par la définition de $||x - y||$.

Si $\gamma < \frac{2(A_2 - A_3)}{A_1^2 A_4}$, ce qui est possible puisque $A_2 > A_3$, nous avons

$$\begin{aligned}
& -2A_2 + 2A_3 + \gamma A_1^2 A_4 < 0 \\
\text{c'est-à-dire,} \quad & \gamma(-2A_2 + 2A_3 + \gamma A_1^2 A_4) < 0 \quad \text{car } \gamma > 0 \\
\text{ou encore,} \quad & 1 - 2\gamma A_2 + A_1^2 A_4 \gamma^2 + 2\gamma A_3 < 1 \, .
\end{aligned}$$

D'où, T est une contraction par rapport à la norme bloc-maximum. ∎

Chapitre 2

Optimisation sous contraintes

Dans ce chapitre, nous considérons le problème de minimiser une fonction coût $F : I\!R^n \to I\!R$ sur un ensemble $X \subset I\!R^n$.
Nous supposons que F est continûment différentiable et que X est convexe, fermé, et non vide.

2.1 Conditions d'optimalité et théorème de projection

Nous commençons avec un ensemble de conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un vecteur $x \in X$ soit optimal.

Proposition 2.1 : *(Conditions d'optimalité)*

a) Si un vecteur $x \in X$ minimise F sur X, alors $(y - x)'\nabla F(x) \geq 0$, pour tout $y \in X$.

b) Si, de plus, F est convexe sur X, alors la condition de la partie a) est aussi suffisante pour que x minimise F sur X.

Preuve :

a) Supposons par l'absurde qu'il existe $y \in X$ tel que $(y - x)'\nabla F(x) < 0$.
F étant différentiable en x, $(y - x)'\nabla F(x)$ est la dérivée directionnelle de f au point x dans la direction $y - x$ (Prop. A.4). D'où, il existe $\varepsilon \in (0, 1)$ tel que

$$F(x + \varepsilon(y - x)) < F(x) .$$

Or $x + \varepsilon(y - x) \in X$ car X est convexe. Par conséquent, x ne peut minimiser F sur X.

Nous obtenons la contradiction désirée.

b) Supposons que $(y - x)'\nabla F(x) \geq 0$ tient $\forall\, y \in X$.

F étant convexe, nous avons

$F(y) \geq F(x) + (y - x)'\nabla F(x)$, $\forall\, y \in X$ (Prop. A.5).

D'où, $F(y) \geq F(x)$, $\forall\, y \in X$.

Par conséquent, x minimise F sur X. ■

Nous introduisons la notion de projection sur l'ensemble X car nous désirons minimiser F sur cet ensemble.

Nous utilisons la notation $[x]^+$ pour noter la projection orthogonale (par rapport à la norme euclidienne) d'un vecteur x sur l'ensemble convexe X.

En particulier, $[x]^+$ est défini par

$$[x]^+ = \arg\min_{z \in X} ||z - x||_2 \, .$$

Le résultat suivant assure que $[x]^+$ est bien défini et fournit des propriétés utiles de la projection.

Proposition 2.2 : *(Théorème de projection)*

a) Quel que soit $x \in I\!R^n$, il existe un unique $z \in X$ qui minimise $||z - x||_2$ sur tout $z \in X$, et ce vecteur sera noté $[x]^+$.

b) Etant donné $x \in I\!R^n$, un vecteur $z \in X$ est égal à $[x]^+$ si et seulement si

$$(y - z)'(x - z) \leq 0 \, , \; \forall\, y \in X \, .$$

c) L'application $f : I\!R^n \to X$ définie par $f(x) = [x]^+$ est non expansive c'est-à-dire :

$$||[x]^+ - [y]^+||_2 \leq ||x - y||_2 \, , \; \forall\, x, y \in I\!R^n \, .$$

Elle est aussi continue.

Preuve :

a) Soit x fixé et soit $w \in X$ arbitraire.

Montrons l'existence de z. Minimiser $||z - x||_2$ sur tout $z \in X$ est équivalent à minimiser la même fonction sur tout $z \in X$ tel que $||x - z||_2 \leq ||x - w||_2$ qui est un ensemble compact. De plus, la fonction g définie par $g(z) = ||z - x||_2^2$ est continue. D'où, z existe car une fonction continue sur un compact atteint son minimum.

Pour montrer l'unicité de z, remarquons que le carré de la norme euclidienne est une fonction strictement convexe de son argument (Prop. A.6 d)).

Cela signifie que g est strictement convexe. Il suit donc que son minimum est atteint en un unique point (Prop. A.7).

b) Le vecteur $[x]^+$ minimise $g(z)$ sur tout $z \in X$. De plus, nous avons que g est convexe sur X et que $\nabla g(z) = 2(z - x)$. Le résultat suit alors les conditions d'optimalité pour des problèmes d'optimisation sous contraintes (Prop. 2.1 b)).

c) Soient x et y des éléments arbitraires de $I\!R^n$.

De la partie b), nous avons

$$(v - [x]^+)'(x - [x]^+) \leq 0 \ , \ \forall \, v \in X \ .$$

Puisque $[y]^+ \in X$, nous obtenons

$$([y]^+ - [x]^+)'(x - [x]^+) \leq 0 \ .$$

De manière analogue, nous avons

$$([x]^+ - [y]^+)'(y - [y]^+) \leq 0 \ .$$

En additionnant ces deux inégalités et en réarrangeant les termes, nous obtenons

$$||[y]^+ - [x]^+||_2^2 \leq ([y]^+ - [x]^+)'(y - x) \ .$$

Or,

$$([y]^+ - [x]^+)'(y - x) \leq ||[y]^+ - [x]^+||_2 ||y - x||_2$$

car la norme euclidienne satisfait l'inégalité de Schwartz.

D'où,

$$||[y]^+ - [x]^+||_2^2 \leq ||[y]^+ - [x]^+||_2 ||y - x||_2 \ ,$$

ce qui prouve que $[.]^+$ est non expansive.

$[.]^+$ est a fortiori continue. ∎

2.2 Algorithme du gradient projeté

L'*algorithme du gradient projeté* est décrit par l'équation

$$x(t+1) = [x(t) - \gamma \nabla F(x(t))]^+ , \tag{2.1}$$

où γ est un scalaire strictement positif qui désigne une valeur de pas.

Soit $T : X \to X$ l'application qui correspond à une itération de cet algorithme, autrement dit

$$T(x) = [x - \gamma \nabla F(x)]^+ .$$

Grâce au théorème de projection (Prop. 2.2), nous pouvons donner une autre définition de l'application T, à savoir $T(x)$ est l'unique vecteur y qui minimise $||y - x + \gamma \nabla F(x)||_2^2$ sur tout $y \in X$ c'est-à-dire qui minimise

$$||y-x||_2^2 + 2\gamma(y-x)'\nabla F(x) + \gamma^2 ||\nabla F(x)||_2^2 .$$

Le dernier terme étant indépendant de y et γ étant strictement positif, nous obtenons que $T(x)$ est l'unique vecteur y qui minimise

$$(y-x)'\nabla F(x) + \frac{1}{2\gamma}||y-x||_2^2 \tag{2.2}$$

sur tout $y \in X$.
Nous étudions maintenant la convergence de l'algorithme du gradient projeté, sous certaines hypothèses.

Hypothèse 2.1 :

a) $F(x) \geq 0$, $\forall\, x \in X$.

b) *(Continuité de Lipschitz de ∇F)*
La fonction F est continûment différentiable et il existe une constante K telle que

$$||\nabla F(x) - \nabla F(y)||_2 \leq K ||x-y||_2 , \ \forall\, x, y \in X .$$

Le résultat suivant montre que pour γ suffisamment petit, la valeur de la fonction coût décroît à chaque itération de l'algorithme du gradient projeté, à moins qu'un point fixe de l'application T qui correspond à une itération n'ait été atteint.

Proposition 2.3 : *(Propriétés de l'application du gradient projeté)*

Si F satisfait la condition de Lipschitz de l'hypothèse 2.1 b), γ est strictement positif, et $x \in X$, alors :

a) $F(T(x)) \leq F(x) - \left(\frac{1}{\gamma} - \frac{K}{2}\right) ||T(x) - x||_2^2$.

b) Nous avons $T(x) = x$ si et seulement si

$$(y - x)'\nabla F(x) \geq 0 \ , \ \forall \ y \in X \ .$$

En particulier, si F est convexe sur l'ensemble X, nous avons $T(x) = x$ si et seulement si x minimise F sur X.

c) L'application T est continue.

Preuve :

a) Par définition, nous avons $T(x) = [x - \gamma\nabla F(x)]^+$, ce qui, par le théorème de projection (Prop. 2.2) est équivalent à

$$(y - T(x))'(x - \gamma\nabla F(x) - T(x)) \leq 0 \ , \ \forall \ y \in X \ . \tag{2.3}$$

En particulier, en prenant $y = x$, nous obtenons

$$(x - T(x))'(x - \gamma\nabla F(x) - T(x)) \leq 0$$

c'est-à-dire

$$||x - T(x)||_2^2 - \gamma(x - T(x))'\nabla F(x) \leq 0$$

ou encore

$$\gamma(T(x) - x)'\nabla F(x) \leq -||T(x) - x||_2^2 \ .$$

D'autre part, l'hypothèse 2.1 b) étant vérifiée, nous pouvons utiliser le lemme de descente (Prop. A.8), et obtenons

$$F(T(x)) \leq F(x) + (T(x) - x)'\nabla F(x) + \frac{K}{2}||T(x) - x||_2^2 \ .$$

D'où,

$$F(T(x)) \leq F(x) - \left(\frac{1}{\gamma} - \frac{K}{2}\right) ||T(x) - x||_2^2 \ ,$$

ce qui prouve la partie a).

b) $\Rightarrow$: Nous pouvons utiliser la relation (2.3) comme définition de $T(x)$. Donc si $T(x) = x$, alors $(y-x)'\gamma\nabla F(x) \geq 0$, $\forall\, y \in X$.
$\Leftarrow$: Si $(y-x)'\gamma\nabla F(x) \geq 0$, $\forall\, y \in X$, alors $(y-x)'(x - \gamma\nabla F(x) - x) \leq 0$, $\forall\, y \in X$, et nous concluons que $x = T(x)$.
Dans le cas convexe, le résultat suit des conditions d'optimalité pour l'optimisation sous contraintes (Prop. 2.1).

c) L'application $x \to x - \gamma\nabla F(x)$ est continue car F est continûment différentiable par hypothèse.
Or, l'application projection est aussi continue (Prop. 2.2 c)).
D'où, T est la composition de deux applications continues et est donc continue. ∎

La proposition 2.3 nous permet de démontrer facilement la convergence de l'algorithme.

Proposition 2.4 : *(Convergence de l'algorithme du gradient projeté)*

Supposons que F satisfait l'hypothèse 2.1.
Si $0 < \gamma < 2/K$ et si x^* est une valeur d'adhérence de la suite $\{x(t)\}$ générée par l'algorithme du gradient projeté (2.1), alors :

$$(y - x^*)'\nabla F(x^*) \geq 0 \, , \; \forall\, y \in X \, .$$

En particulier, si F est convexe sur l'ensemble X, alors x^* minimise F sur X.

Preuve :

Soit $\{x(t)\}$ la suite de vecteurs générée par l'algorithme. Par la prop. 2.3 a), nous avons que la suite $\{F(x(t))\}$ est décroissante, car $0 < \gamma < 2/K$ par hypothèse.
F étant bornée inférieurement, cette suite converge, tandis que $T(x(t)) - x(t)$ converge vers 0.
Soit x^* une valeur d'adhérence de la suite $\{x(t)\}$ et soit $\{x(t_k)\}$ une sous-suite de $\{x(t)\}$ convergeant vers x^*.
Alors, $T(x(t_k))$ converge aussi vers x^*, et l'application T étant continue (Prop. 2.3 c)), nous avons $T(x^*) = x^*$.
Par conséquent, le résultat suit de la prop. 2.3 b). ∎

En utilisant les propriétés générales de convergence des itérations contractantes (cfr chapitre 1), nous pouvons démontrer le résultat suivant, qui nous fournit une estimation de la vitesse de convergence.

Proposition 2.5 : *(Convergence linéaire pour les problèmes fortement convexes)*

Supposons que F satisfait l'hypothèse 2.1. De plus, supposons qu'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$(\nabla f(x) - \nabla f(y))'(x - y) \geq \alpha ||x - y||_2^2 \,, \; \forall \, x, y \in X \,. \tag{2.4}$$

Alors :
Il existe un unique vecteur x^* qui minimise F sur l'ensemble X.
De plus,
la suite $\{x(t)\}$ générée par l'algorithme du gradient projeté (2.1) converge linéairement vers x^*, pourvu que $\gamma > 0$ est suffisamment petit.

Preuve :

La condition (2.4) implique que l'application $T : X \to X$ définie par
$T(x) = [x - \gamma \nabla F(x)]^+$ est une contraction par rapport à la norme euclidienne $||.||_2$, pourvu que $\gamma > 0$ est suffisamment petit (en utilisant la prop. 1.6, spécialisée au cas d'un seul bloc de composantes).
Par la prop. 1.1, nous avons que l'application T a un unique point fixe $x^* \in X$ et que la suite générée par l'algorithme du gradient projeté $x := T(x)$ converge linéairement vers x^*.
Un tel point fixe satisfait $\nabla F(x^*) = 0$.
D'autre part, la condition (2.4) implique aussi que la fonction F est strictement convexe (Prop. A.9).
Par conséquent, x^* minimise F (Prop. A.10).
Enfin, F étant strictement convexe, il n'existe pas d'autre point qui minimise F (Prop. A.7). ∎

2.3 Algorithme du gradient projeté avec mise à échelle

Nous désirons généraliser l'algorithme du gradient projeté afin de mettre à échelle la direction de mise à jour $\nabla F(x(t))$.
A cet effet, nous remplaçons l'équation (2.1) par

$$x(t+1) = [x(t) - \gamma(M(t))^{-1}\nabla F(x(t))]^+ \ , \tag{2.5}$$

où $M(t)$ est une matrice de mise à échelle inversible.

Cependant, cet algorithme (2.5) ne converge en général pas vers un point qui minimise la fonction F. Pour obtenir la convergence, nous devrions effectuer la projection par rapport à un système de coordonnées différent (autrement dit, par rapport à une norme différente) déterminé par $M(t)$.

Supposons pour l'instant que $M(t)$ est symétrique et définie positive, et considérons la norme $||.||_{M(t)}$ définie par

$$||x||_{M(t)} = (x'M(t)x)^{1/2} \ .$$

Nous définissons alors $[x]^+_{M(t)}$ comme le vecteur y qui minimise $||y-x||_{M(t)}$ sur tout $y \in X$, et nous remplaçons l'équation (2.5) par l'itération

$$x(t+1) = [x(t) - \gamma(M(t))^{-1}\nabla F(x(t))]^+_{M(t)} \ . \tag{2.6}$$

Comme dans le cas de la méthode du gradient projeté sans mise à échelle, nous pouvons définir $x(t+1)$ comme la solution d'un problème de programmation quadratique (voir l'expression (2.2)). En particulier, nous pouvons voir que

$$x(t+1) = \arg\min_{y \in X}\{\frac{1}{2\gamma}(y - x(t))'M(t)(y-x(t)) + (y-x(t))'\nabla F(x(t))\} \ . \tag{2.7}$$

En fait, il est préférable de définir $x(t+1)$ au moyen de l'optimisation quadratique dans l'équation (2.7) plutôt que comme une projection (voir l'équation (2.6)), car l'expression quadratique dans l'équation (2.7) est bien définie même si la matrice $M(t)$ n'est pas inversible. Cela fournit une certaine flexibilité supplémentaire, qui est parfois utile.

L'algorithme qui génère $x(t+1)$ suivant l'équation (2.7) est appelé *l'algorithme du gradient projeté avec mise à échelle.*

Pour que cet algorithme soit bien défini, nous devons nous assurer que le minimum dans l'équation (2.7) est atteint en un unique élément de X.
Le résultat suivant fournit des conditions suffisantes pour que ce soit le cas.

Proposition 2.6 :

Supposons qu'une matrice $M(t)$ est symétrique et satisfait la condition de positivité suivante :
Il existe une constante $\alpha > 0$ telle que

$$(x-y)'M(t)(x-y) \geq \alpha||x-y||_2^2 \, , \; \forall \, x, y \in X \; . \tag{2.8}$$

Alors :
Le minimum dans le problème de programmation quadratique de l'équation (2.7) est atteint en un unique vecteur $y \in X$.

Preuve :

- Montrons d'abord que l'expression minimisée dans l'équation (2.7), vue comme une fonction de y, est une fonction strictement convexe sur l'ensemble X.
  La fonction $y \mapsto (y - x(t))'\nabla F(x(t))$ étant linéaire affine, il est suffisant de montrer que la fonction $y \mapsto \varphi(y) = (y - x(t))'M(t)(y - x(t))$ est strictement convexe sur X.
  Prenons $y_1, y_2 \in X$ arbitraires, $y_1 \neq y_2$, et $\lambda \in (0, 1)$.
  Montrons que $\varphi(\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2) < \lambda\varphi(y_1) + (1-\lambda)\varphi(y_2)$. Posons $z_1 = y_1 - x(t)$ et $z_2 = y_2 - x(t)$.
  Il est alors équivalent de voir que

  $$(\lambda z_1 + (1-\lambda)z_2)'M(t)(\lambda z_1 + (1-\lambda)z_2) < \lambda z_1' M(t) z_1 + (1-\lambda) z_2' M(t) z_2 \; ,$$

  ce qui se ramène après calculs à

  $$(z_1 - z_2)'M(t)(z_1 - z_2) > 0$$

  ou encore à

  $$(y_1 - y_1)'M(t)(y_1 - y_2) > 0 \; .$$

  Cette dernière inégalité est vérifiée grâce à l'hypothèse (2.8).
  D'où, l'expression minimisée est bien strictement convexe sur X.
  Par conséquent, le minimum dans l'équation (2.7) est atteint en un vecteur de X au plus (Prop. A.7).

- Montrons maintenant l'existence du vecteur donnant le minimum. Nous avons

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2\gamma}(y-x(t))'M(t)(y-x(t))+(y-x(t))'\nabla F(x(t))\\
&\geq \frac{1}{2\gamma}\alpha||y-x(t)||_2^2+||y-x(t)||_2||\nabla F(x(t))||_2\\
&\qquad\qquad\qquad\text{par la condition de positivité (2.8)}\\
&= ||y-x(t)||_2[\frac{\alpha}{2\gamma}||y-x(t)||_2+||\nabla F(x(t))||_2]\ .
\end{aligned}
$$

Cette expression tend vers l'infini quand $||y||_2$ tend vers l'infini.
Il en est donc de même pour l'expression à minimiser. Par conséquent, nous pouvons restreindre la minimisation à un sous-ensemble compact de X.
La fonction à minimiser étant continue, l'existence du vecteur demandé suit, car une fonction continue sur un ensemble compact atteint son minimum. ∎

Remarque :

La condition de positivité (2.8) est satisfaite si $M(t)-\alpha I$ est symétrique et définie positive. Dans ce cas, α est une borne inférieure pour la plus petite valeur propre de $M(t)$.

Nous ne démontrons pas le résultat suivant qui généralise les propositions 2.2 à 2.4 au cas où la mise à échelle est utilisée, car la preuve est fort semblable.

Proposition 2.7 : *(Propriétés et convergence de l'algorithme de projection avec mise à échelle)*

Soit $F : I\!R^n \to I\!R$ qui satisfait l'hypothèse 2.1, et soit $\{M(t)|t=0,1,\cdots\}$ une suite bornée de matrices symétriques de dimensions (n,n). Supposons qu'il existe α strictement positif pour lequel chaque matrice $M(t)$ satisfait la condition de positivité (2.8).
Alors :

a) Quel que soit $x \in I\!R^n$, il existe un unique $y \in X$ qui minimise $(x-y)'M(t)(x-y)$ sur X, et ce vecteur sera noté $[x]^+_{M(t)}$, ou bien $[x]^+_t$.

b) *(Théorème de projection avec mise à échelle)*
Etant donné $x \in I\!R^n$, un vecteur $z \in S$ est égal à $[x]^+_t$ si et seulement si

$$(y-z)'M(t)(x-y) \leq 0\ ,\ \forall\, y \in X\ .$$

c) Il existe une constante A_1 telle que

$$||[x]_t^+ - [y]_t^+||_2 \leq A_1||x-y||_2 \ , \ \forall\, t, \ \forall\, x,y \in I\!R^n \ .$$

d) De plus, si $M(t)$ est définie positive, alors

$$([x]_t^+ - [y]_t^+)'M(t)([x]_t^+ - [y]_t^+) \leq (x-y)'M(t)(x-y) \ , \ \forall\, x,y \in I\!R^n \ .$$

Soit $T_t : X \to X$, l'application qui correspond à la tème itération de l'algorithme du gradient projeté avec mise à échelle. Autrement dit, $x(t+1) = T_t(x(t))$, où $x(t+1)$ est défini par la minimisation quadratique dans l'équation (2.7).
Nous supposons que γ est strictement positif. Alors :

e) Nous avons $T_t(x) = x$ si et seulement si

$$(y-x)'\nabla F(x) \geq 0 \ , \ \forall\, y \in X \ .$$

En particulier, si F est convexe sur l'ensemble X, nous avons $T(x) = x$ si et seulement si x minimise F sur X.

f) Il existe une constante A_2 telle que

$$||T_t(x) - T_t(y)||_2 \leq A_2||x-y||_2 \ , \ \forall\, x,y \in X, \ \forall\, t \ .$$

g) Si γ est suffisamment petit, alors il existe une constante strictement positive A_3 telle que

$$F(T_t(x)) \leq F(x) - A_3||T_t(x) - x||_2^2 \ , \ \forall\, x \in X, \ \forall\, t \ .$$

h) Si γ est suffisamment petit, alors toute valeur d'adhérence x^* de la suite $\{x(t)\}$ générée par l'algorithme du gradient projeté avec mise à échelle satisfait

$$(y-x^*)'\nabla F(x^*) \geq 0 \ , \ \forall\, y \in X \ .$$

De plus, si F est convexe sur l'ensemble X, alors x^* minimise F sur X.

2.4 Cas du produit cartésien : Implémentations en parallèle

En général, nous ne pouvons pas implémenter l'algorithme du gradient projeté en parallèle. Même si le calcul de $x - \gamma \nabla F(x)$ peut être facilement mis en parallèle, le calcul de la projection est un problème non trivial d'optimisation, qui fait intervenir toutes les composantes de x.
Cependant, dans le cas particulier important où l'ensemble X est une "boîte" (c'est-à-dire $X = \prod_{i=1}^{m}[a_i, b_i]$ pour certains réels a_i, b_i), nous obtenons la ième composante de la projection du vecteur x sur X en projetant la ième composante de x sur l'intervalle $[a_i, b_i]$. Autrement dit, nous pouvons travailler indépendemment pour chaque composante.

Supposons que l'espace $I\!R^n$ est représenté comme le produit cartésien d'espaces $I\!R^{n_i}$, où $n_1 + n_2 + \cdots + n_m = n$, et que l'ensemble contrainte X se décompose en un produit cartésien d'ensembles X_i, où chaque X_i est un sous-ensemble convexe fermé de $I\!R^{n_i}$. Par conséquent, nous écrivons tout vecteur x de $I\!R^n$ sous la forme $x = (x_1, x_2, \cdots, x_m)$ où chaque x_i est un élément de $I\!R^{n_i}$.
La projection de x sur X est alors égale au vecteur $([x_1]_1^+, \cdots, [x_m]_m^+)$, où $[x_i]_i^+$ désigne la projection de x_i sur X_i.

La même discussion s'applique pour l'algorithme du gradient projeté avec mise à échelle, à condition que les matrices $M(t)$ soient bloc-diagonales.

Afin de voir cela, supposons que $M(t)$ est bloc-diagonale, le ième bloc $M_i(t)$ étant de dimensions (n_i, n_i).
Nous pouvons réécrire l'expression quadratique minimisée dans l'équation (2.7) comme

$$\sum_{i=1}^{m} [\frac{1}{2\gamma}(y_i - x_i(t))' M_i(t)(y_i - x_i(t)) + (y_i - x_i(t))' \nabla_i F(x(t))] \, .$$

Lorsque X est un produit cartésien, minimiser cette dernière expression quadratique sur tout $y \in X$ est équivalent à minimiser pour chaque i, le ième terme de la somme sur tout $y_i \in X_i$.
Ces minimisations peuvent être effectuées en parallèle par différents processeurs.
Sous l'hypothèse que X est un produit cartésien, nous définissons une version de Gauss-Seidel de l'algorithme du gradient projeté (Le cas où il y a une mise à échelle étant analogue, nous ne l'envisageons pas).

L'algorithme de Gauss-Seidel est défini par l'itération

$$x_i(t+1) = [x_i(t) - \gamma \nabla_i F(z(i,t))]_i^+ \ , \tag{2.9}$$

où

$$z(i,t) = (x_1(t+1), \cdots, x_{i-1}(t+1), x_i(t), \cdots, x_m(t)), \quad 1 \leq i \leq m \ .$$

Nous posons aussi $z(m+1,t) = x(t+1)$.

Proposition 2.8 : *(Convergence de l'algorithme du gradient projeté de Gauss-Seidel)*

Supposons que $F : I\!R^n \to I\!R$ satisfait l'hypothèse 2.1.
Si $\gamma > 0$ est suffisamment petit, alors toute valeur d'adhérence x^* de la suite $\{x(t)\}$ générée par l'algorithme de Gauss-Seidel (2.9) satisfait

$$(y - x^*)' \nabla F(x^*) \geq 0 \ , \ \forall \, y \in X \ .$$

Preuve :

En appliquant la prop. 2.3 a) sur la fonction F, vue comme une fonction de x_i seulement, nous obtenons que si γ est suffisamment petit, il existe $A > 0$ tel que

$$F(z(i+1,t)) \leq F(z(i,t)) - A||z(i+1,t) - z(i,t)||_2^2 \ , \ \forall \, t \ .$$

Il suit que $\{F(x(t))\}$ est décroissante.
Or, F est bornée inférieurement par hypothèse. D'où, la suite $\{F(x(t))\}$ converge.
Ceci implique que $z(i+1,t) - z(i,t)$ converge vers zéro pour tout i.
En particulier, $x(t+1) - x(t)$ converge vers zéro.
Soit x^* une valeur d'adhérence de la suite $\{x(t)\}$.
Prenons la limite dans l'équation (2.9) suivant une suite de temps tels que $x(t)$ converge vers x^*. Nous obtenons alors que

$$x_i^* = [x_i^* - \gamma \nabla F(x^*)]_i^+ \ , \ \forall \, i$$

car ∇F est continue et la projection l'est aussi (Prop. 2.2 c)).
D'où, $x^* = [x^* - \gamma \nabla F(x^*)]^+$, et le résultat suit de la prop. 2.3 b). ■

2.5 Algorithmes non linéaires

Supposons que X se décompose en un produit cartésien. Dans ce cas, l'*algorithme non linéaire de Jacobi* est défini par

$$x_i(t+1) = \arg\min_{x_i \in X_i} F(x_1(t), \cdots, x_{i-1}(t), x_{i+1}(t), \cdots, x_m(t)) ,$$

et *l'algorithme non linéaire de Gauss-Seidel* est défini par

$$x_i(t+1) = \arg\min_{x_i \in X_i} F(x_1(t+1), \cdots, x_{i-1}(t+1), x_i, x_{i+1}(t), \cdots, x_m(t)) . \tag{2.10}$$

Nous établissons la convergence de cet algorithme (2.10).

Proposition 2.9 : *(Convergence de l'algorithme non linéaire de Gauss-Seidel)*

Supposons que F est continûment différentiable et convexe sur l'ensemble X. (Rappelons que X est convexe, fermé, et non vide).
De plus, supposons que pour tout i, F est une fonction strictement convexe de x_i, lorsque les valeurs des autres composantes de x sont maintenues constantes.
Soit $\{x(t)\}$ la suite générée par l'algorithme non linéaire de Gauss-Seidel, supposé bien défini. Alors :
Toute valeur d'adhérence de $\{x(t)\}$ minimise F sur X.

Preuve :

- Posons $z(t) = (x_1(t+1), \cdots, x_i(t+1), x_{i+1}(t), \cdots, x_m(t))$. En utilisant la définition (2.10) de l'itération de Gauss-Seidel, nous obtenons

$$\begin{aligned} F(x(t)) &= F(x_1(t), \cdots, x_m(t)) \geq F(z^1(t)) \geq F(z^2(t)) \\ &\geq \cdots \geq F(z^{m-1}(t)) \geq F(x(t+1)) , \forall t . \end{aligned} \tag{2.11}$$

Soit $x^* = (x_1^*, \cdots, x_m^*)$ une valeur d'adhérence de la suite $\{x(t)\}$ et soit $\{x(t_k)\}$ une sous-suite de $\{x(t)\}$ convergeant vers x^*. Nous avons que $x^* \in X$ car X est fermé (Prop. A.2).
De l'équation (2.11), nous remarquons que la suite $\{F(x(t))\}$ converge soit vers $-\infty$, soit vers un nombre réel fini.
De plus, F étant continue par hypothèse, nous avons que $\{F(x(t_k))\}$ converge vers

$F(x^*)$.
Ceci implique que la suite entière $\{F(x(t_k))\}$ converge vers $F(x^*)$.

Montrons maintenant que x^* minimise F sur l'ensemble X.

- A cet effet, montrons d'abord que $x_1(t_{k+1}) - x_1(t_k)$ converge vers zéro.
Supposons le contraire, ou de manière équivalente, que $z^1(t_k) - x(t_k)$ ne converge pas vers zéro.
Posons $\gamma(t_k) = ||z^1(t_k) - x(t_k)||_2$.
En nous restreignant à une sous-suite de $\{t_k\}$, encore notée $\{t_k\}$, nous pouvons supposer qu'il existe $\gamma_0 > 0$ tel que $\gamma(t_k) \geq \gamma_0$ pour tout k.
Soit

$$s^1(t_k) = \frac{z^1(t_k) - x(t_k)}{\gamma(t_k)}$$

Alors,

$$z^1(t_k) = x(t_k) + \gamma(t_k)s^1(t_k), \quad ||s^1(t_k)||_2 = 1 \ ,$$

et $s^1(t_k)$ diffère de zéro uniquement suivant le premier bloc de composantes. Nous remarquons que $s^1(t_k)$ appartient à un ensemble compact, et a donc une valeur d'adhérence, soit $\overline{s}^1$.
D'où, il existe une sous-suite de $\{t_k\}$, encore notée $\{t_k\}$, telle que $s^1(t_k)$ converge vers $\overline{s}^1$.
Fixons maintenant $\varepsilon \in [0, 1]$. Nous remarquons que $0 \leq \varepsilon\gamma_0 \leq \gamma(t_k)$. Par conséquent, $x(t_k) + \varepsilon\gamma_0 s^1(t_k)$ se trouve sur le segment joignant $x(t_k)$ à $x(t_k) + \gamma(t_k)s^1(t_k)$, et appartient à X car X est convexe.
En utilisant le fait que $z^1(t_k)$ minimise F sur tout x qui diffère de $x(t_k)$ suivant le premier bloc de composantes, nous obtenons

$$\begin{aligned}
& F(z^1(t_k)) \leq F(x(t_k) + \varepsilon\gamma_0 s_1(t_k)) \\
\text{car} \quad & F(x(t_k) + \varepsilon\gamma_0 s_1(t_k)) = F(\frac{\varepsilon\gamma_0}{\gamma(t_k)} x_1(t_{k+1}) + (1 - \frac{\varepsilon\gamma_0}{\gamma(t_k)} x_1(t_k), \\
& \qquad x_2(t_k), \cdots, x_m(t_k)) \\
\text{vu que} \quad & \varepsilon\gamma_0 s_1(t_k) = (\frac{\varepsilon\gamma_0}{\gamma(t_k)}(x_1(t_{k+1}) - x_1(t_k)), 0, \cdots, 0) \ .
\end{aligned}$$

De plus, nous avons

$$F(x(t_k) + \varepsilon\gamma_0 s^1(t_k)) = F(\frac{\varepsilon\gamma_0}{\gamma(t_k)} z^1(t_k) + (1 - \frac{\varepsilon\gamma_0}{\gamma(t_k)} x(t_k))$$

$$\leq F(x(t_k)) + \frac{\varepsilon\gamma_0}{\gamma(t_k)}(F(z^1(t_k)) - F(x(t_k)))$$

$$\text{car } \frac{\varepsilon\gamma_0}{\gamma(t_k)} \in [0,1] \text{ et } F \text{ est convexe par hypothèse}$$

$$\leq F(x(t_k)) \quad \text{car } F(z^1(t_k)) - F(x(t_k)) \leq 0 \; .$$

Donc, nous avons

$$F(z^1(t_k)) \leq F(x(t_k) + \varepsilon\gamma_0 s^1(t_k)) \leq F(x(t_k)) \; . \tag{2.12}$$

Puisque $\{F(x(t))\}$ converge vers $F(x^*)$, l'équation (2.11) montre que $F(z^1(t))$ converge aussi vers $F(x^*)$.
Ainsi, en prenant la limite pour k tendant vers l'infini dans (2.12), nous obtenons

$$F(x^*) \leq F(x^* + \varepsilon\gamma_0\overline{s}^1) \leq F(x^*) \; .$$

Par conséquent, $F(x^*) = F(x^* + \varepsilon\gamma_0\overline{s}^1)$, $\forall\, \varepsilon \in [0,1]$. Puisque $g_0\overline{s}^1 \neq 0$, ceci contredit la stricte convexité de F vue comme une fonction du premier bloc de composantes.
Cette contradiction établit que $x_1(t_{k+1}) - x_1(t_k)$ converge vers zéro.
En particulier, $z^1(t_k)$ converge vers x^*.

- D'autre part, de la définition (2.10) de l'algorithme, nous avons

$$F(z^1(t_k)) \leq F(x_1, x_2(t_k), \cdots, x_m(t_k)) \; , \; \forall\, x_1 \in X_1 \; .$$

En prenant la limite pour k tendant vers l'infini, nous obtenons

$$F(x^*) \leq F(x_1, x_2^*, \cdots, x_m^*) \; , \; \forall\, x_1 \in X_1 \; .$$

Par les conditions d'optimalité (Prop. 2.1), nous concluons que

$$\nabla_1 F(x^*)'(x_1 - x_1^*) \geq 0 \; , \; \forall\, x_1 \in X_1 \; .$$

- Enfin, considérons la suite $\{z^i(t_k)\}$. nous avons déjà montré que $z^1(t_k)$ converge vers x^*.
Nous pouvons répéter la démarche précédente afin de montrer que $x_2(t_{k+1}) - x_2(t_k)$ converge vers zéro et obtenir ainsi

$$\nabla_2 F(x^*)'(x_2 - x_2^*) \geq 0 \; , \; \forall\, x_2 \in X_2 \; .$$

Par récurrence, nous avons

$$\nabla_i F(x^*)'(x_i - x_i^*) \geq 0 \ , \ \forall \ x_i \in X_i \text{ et } \ \forall \ i \ .$$

En additionnant toutes ces inégalités, nous obtenons

$$\nabla F(x^*)'(x - x^*) \geq 0 \ , \ \forall \ x \in X$$

car l'ensemble X a la structure d'un produit cartésien.
La fonction F étant convexe par hypothèse, nous concluons par la prop. 2.1 que x^* minimise F sur l'ensemble X. ■

Remarques :

1. L'algorithme non linéaire de Jacobi peut être mis en parallèle en affectant un processeur séparé à chaque bloc de composantes x_i.

2. Nous pouvons aussi considérer des méthodes hybrides qui combinent à la fois des caractéristiques des méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel.
   Par exemple, nous pourrions diviser les m blocs de composantes de x en deux groupes $(x_1, \cdots, x_k)$ et $(x_{k+1}, \cdots, x_m)$, et utiliser les équations de mise à jour

$$\begin{aligned}
&x_i(t+1) = \arg\min_{x_i \in X_i} F(x_1(t), \cdots, x_{i-1}(t), x_i, x_{i+1}(t), \cdots, x_m(t)) \\
&\text{si } 1 \leq i \leq k, \text{ et} \\
&x_i(t+1) = \arg\min_{x_i \in X_i} F(x_1(t+1), \cdots, x_k(t+1), x_{k+1}(t), \cdots, \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad x_{i-1}(t), x_i, x_{i+1}(t), \cdots, x_m(t)) \\
&\text{si } k+1 \leq i \leq m \ .
\end{aligned}$$

Donc, chaque groupe de composantes est mis à jour selon la manière de Jacobi, mais les mises à jour du second groupe incorporent les résultats des mises à jour du premier groupe, comme dans les itérations de Gauss-Seidel (Des généralisations à plus de deux groupes sont évidemment possibles).
Aussi longtemps que le nombre de processeurs est plus petit que le nombre de composantes de chaque groupe, nous obtenons la même mise en parallèle que pour la méthode non linéaire de Jacobi, mais la convergence pourrait être plus rapide, grâce à l'élément de Gauss-Seidel.

Chapitre 3

Décomposition de problèmes d'optimisation

Dans ce chapitre, nous montrons comment exploiter les caractéristiques structurelles d'un problème et améliorer la mise en parallèle du calcul de la solution grâce à des transformations appropriées du problème de départ.

Nous basons notre approche sur la théorie de la dualité. Notre idée est de considérer un problème dual d'optimisation, qui peut mieux convenir à la mise en parallèle que le problème original.

Les approches envisagées sont connues sous le nom de *méthodes de décomposition.* Depuis plusieurs années, elles ont été appliquées à des problèmes de grande taille munis d'une structure spéciale. Dans ces méthodes, le problème d'optimisation de départ est remplacé par de nombreux sous-problèmes de plus petites dimensions, dont la résolution est évidemment plus aisée. Et, lorsque nous pouvons résoudre en parallèle ces sous-problèmes plus simples, ces méthodes deviennent encore plus attractives.

Nous examinons d'abord un problème de programmation quadratique strictement convexe. Le problème apparaît souvent dans des applications, ou comme sous-routine de calculs plus complexes (par exemple, la méthode du gradient projeté).

Ensuite, nous considérons une autre classe de problèmes présentant une structure particulière. Ici, la fonction coût primale est séparable, ce qui facilite la mise en parallèle, et strictement convexe.
Cette dernière propriété est importante car elle implique la différentiabilité de la fonction

coût duale (cfr théorèmes B.1 et B.2).

Enfin, nous consacrons le reste du chapitre aux méthodes qui traitent du cas où le coût primal n'est pas strictement convexe, le coût dual étant alors en général non différentiable. Nous montrons comment le problème dual peut être converti en un problème d'optimisation différentiable, et peut ensuite être résolu. Une autre possibilité, que nous ne considérons pas, serait de résoudre le problème dual par une méthode d'optimisation non différentiable.

3.1 Programmation quadratique

Considérons le problème de programmation quadratique suivant :

$$\begin{array}{ll} \text{minimiser}_x & \frac{1}{2}x'Qx - b'x \\ \text{sous contrainte} & \\ & Ax \leq c \end{array} \tag{3.1}$$

où Q est une matrice symétrique et définie positive de dimensions (n, n) donnée, A est une matrice de dimensions (m, n) donnée, b et c sont des vecteurs donnés, respectivement de longueur n et m.

Remarques :

1. La résolution d'un problème de ce type (ou s'y ramenant) survient naturellement dans beaucoup de contextes.

2. Lorsque Q est la matrice identité et b le vecteur nul, résoudre le problème (3.1) est équivalent à projeter l'origine sur l'ensemble contrainte.

Déterminons maintenant le dual du problème de programmation quadratique (3.1).

Nous avons que la fonction lagrangienne L de ce problème est donnée par

$$L(x, u) = \frac{1}{2}x'Qx - b'x + u'(Ax - c) \ ,$$

où u est le vecteur des multiplicateurs de Lagrange (de longueur m) associé à la contrainte $Ax \leq c$.

Et la fonction duale vaut

$$q(u) = \inf_x L(x,u)$$

c'est-à-dire

$$q(u) = \inf_x \{\frac{1}{2}x'Qx - b'x + u'(Ax - c)\} . \tag{3.2}$$

L'infinimum est atteint lorsque $Qx - b + A'u = 0$ ce qui est équivalent à $x = Q^{-1}(b - A'u)$.

Substituons cette dernière expression dans la relation (3.2).
Nous obtenons après calculs

$$q(u) = -\frac{1}{2}u'AQ^{-1}A'u - u'(c - AQ^{-1}b) - \frac{1}{2}b'Q^{-1}b$$

Remarquons que le dernier terme de cette relation est indépendant de u, et posons
$P = AQ^{-1}A'$ et $r = c - AQ^{-1}b$.

Après un changement de signe qui le convertit en un problème de minimisation, le problème dual s'écrit alors :

$$\begin{array}{ll} \text{minimiser}_u & \frac{1}{2}u'Pu + r'u \\ \text{sous contrainte} & \\ & u \geq 0 \end{array} \tag{3.3}$$

où $P = AQ^{-1}A'$ et $r = c - AQ^{-1}b$.

Nous avons que si u^* résout le problème dual, alors $x^* = Q^{-1}(b - A'u^*)$ est solution du problème primal (3.1).

D'autre part, le problème dual (3.3) présente l'avantage de n'être plus soumis qu'à des contraintes de positivité. Ainsi, il convient à l'utilisation d'algorithmes en parallèle.

Notons a_j le vecteur de longueur n représentant la $j$ème colonne de A', et supposons que a_j est non nul, quel que soit j. (Si a_j était nul, la contrainte $a_j'x \leq c_j$ perdrait sa signification et nous pourrions l'éliminer).

Puisque Q est symétrique et définie positive, le $j$ème élément diagonal de P, donné par $p_{jj} = a_j' Q^{-1} a_j$, est strictement positif. Ceci signifie que pour tout j, la fonction coût duale est strictement convexe suivant la $j$ème composante.

Par conséquent, l'hypothèse de convexité stricte de la proposition 2.9 du chapitre précédent est satisfaite, et nous pouvons dès lors utiliser l'algorithme non linéaire de Gauss-Seidel.

Le coût dual étant quadratique, nous pouvons effectuer la minimisation par rapport à u analytiquement, et écrire l'itération de manière explicite, comme nous le montre ce qui suit.

Calculons la dérivée partielle première de la fonction coût duale par rapport à u_j. Elle est donnée par

$$r_j + \sum_{k=1}^{m} p_{jk} u_k \tag{3.4}$$

où r_j représente la $j$ème composante du vecteur r et p_{jk} l'élément de la matrice P placé en $j$ème ligne et $k$ème colonne.

Notons $\tilde{u}_j$ le minimum du coût dual suivant la $j$ème coordonnée, lorsque les contraintes de positivité sont ignorées.

Nous obtenons en annulant (3.4) :

$$\begin{aligned} \tilde{u}_j &= -\frac{1}{p_{jj}}(r_j + \sum_{j \neq k} p_{jk} u_k) \\ &= u_j - \frac{1}{p_{jj}}(r_j + \sum_{k=1}^{m} p_{jk} u_k) . \end{aligned}$$

Tenons compte maintenant de la contrainte de positivité $u_j \geq 0$.
L'itération de Gauss-Seidel, lorsque nous mettons à jour la $j$ème coordonnée, prend alors la forme suivante :

$$\begin{cases} u_j := \max\{0, \tilde{u}_j\} = \max\{0, u_j - \frac{1}{p_{jj}}(r_j + \sum_{k=1}^{m} p_{kj} u_k)\} \\ u_i := u_i \ , \ \forall \, i \neq j \ . \end{cases} \tag{3.5}$$

Mentionnons également l'itération qui correspond à la méthode de Jacobi. Prenant en compte la forme de la dérivée partielle première du coût dual par rapport à u_j donnée par (3.4), l'itération de Jacobi est donnée par

$$u_j(t+1) = \max\{0, u_j(t) - \frac{\gamma}{p_{jj}}(r_j + \sum_{k=1}^{m} p_{jk}u_k(t))\}, \quad j = 1, \cdots, m \tag{3.6}$$

où γ est un scalaire strictement positif qui désigne une valeur de pas.

Cette itération convient mieux à la mise en parallèle que l'itération de Gauss-Seidel (3.5). D'un autre côté, pour qu'il y ait convergence, nous devrions choisir γ suffisamment petit. Il se peut qu'il soit nécessaire d'effectuer plusieurs essais afin d'obtenir le choix approprié de la valeur du pas.
Lorsque γ vaut $1/m$, nous pouvons établir la convergence de la méthode, mais cette valeur pourrait s'avérer être trop petite pour certains problèmes, et mener à une convergence particulièrement lente et pourtant évitable.

Un schéma plus pratique en général combine à la fois la méthode de Jacobi et celle de Gauss-Seidel. Dans ce cas, nous partitionnons l'ensemble des indices $\{1, \cdots, m\}$ en sous-ensembles, et lors de chaque itération, nous mettons à jour selon l'équation (3.6) les composantes d'un seul des sous-ensembles. Cette méthode hybride permet d'agrandir la gamme des valeurs de γ pour lesquelles nous obtenons la convergence.

En pratique, A est souvent une matrice creuse, et nous aimerions tirer un avantage de cette structure particulière. Malheureusement, la matrice $P = AQ^{-1}A'$ jouit moins de cette structure favorable. D'autre part, il pourrait être indésirable de calculer et de stocker les m^2 éléments de P, surtout lorsque m est grand.

Il s'avère que nous pouvons réaliser l'itération de Gauss-Seidel (3.5) sans connaissance explicite des éléments p_{jk} de la matrice P. En fait, nous avons seulement besoin des éléments de la matrice AQ^{-1}. Voyons comment ceci peut se faire.

A cet effet, considérons le vecteur (de longueur m)

$$y = -A'u \, . \tag{3.7}$$

Le vecteur Pu (de longueur m) s'écrit alors :

$$Pu = AQ^{-1}A'u = -AQ^{-1}y \, ,$$

et la $j$ème composante de cette équation vectorielle donne

$$\sum_{k=1}^{m} p_{jk}u_k = -w_j'y \tag{3.8}$$

où w_j' représente la $j$ème ligne de la matrice AQ^{-1} de dimensions (m,n).

De plus, l'élément p_{jj} de la matrice P s'exprime comme

$$p_{jj} = w_j'a_j \tag{3.9}$$

où a_j est la $j$ème colonne de A'.

Grâce aux relations (3.8) et (3.9), nous pouvons écrire l'itération de Gauss-Seidel (3.5) sous la forme suivante :

$$\begin{cases} u_j := \max\{0, u_j - \frac{1}{w_j'a_j}(r_j - w_j'y)\} \\ u_i := u_i \ , \ \forall\, i \neq j \ . \end{cases}$$

Ce qui est encore équivalent à

$$u := u - \min\{u_j, \frac{1}{w_j'a_j}(r_j - w_j'y)\}e_j \tag{3.10}$$

où e_j désigne le $j$ème vecteur unité (de longueur m). (Autrement dit, tous ses éléments sont nuls, sauf le $j$ème qui vaut 1).

L'itération correspondante pour le vecteur y de l'équation (3.7) s'obtient par la multiplication de l'équation (3.10) par $-A'$. Cela donne

$$y := y + \min\{u_j, \frac{1}{w_j'a_j}(r_j - w_j'y)\}a_j \ . \tag{3.11}$$

Pour terminer, résumons la méthode non linéaire de Gauss-Seidel.
Initialement, u est un vecteur quelconque de l'orthant positif, et $y = -A'u$. A chaque itération, une composante d'indice j est choisie, et les nouveaux itérés de u et y sont calculés simultanément, en utilisant les équations (3.10) et (3.11).

Remarque :

Pour des problèmes revêtant une structure spéciale, il est possible de mettre en parallèle la méthode de Gauss-Seidel.

3.2 Programmation convexe strictement séparable

Supposons que l'espace $\mathbb{R}^n$ se décompose en un produit cartésien d'espaces $\mathbb{R}^{n_i}$, où $n_1 + n_2 + \cdots + n_m = n$.

Considérons le problème suivant :

$$\begin{array}{ll} \text{minimiser}_x & \sum_{i=1}^{m} F_i(x_i) \\ \text{sous contraintes} & \\ & e'_j x = s_j, \quad j = 1, \cdots, r \\ & x_i \in P_i, \quad i = 1, \cdots, m \end{array} \tag{3.12}$$

où les $F_i : \mathbb{R}^{n_i} \to \mathbb{R}$ sont des fonctions strictement convexes, les x_i sont des sous-vecteurs de longueur n_i du vecteur x de longueur n, les e_j sont des vecteurs de longueur n donnés, les s_j sont des scalaires donnés, et les P_i sont des sous-ensembles polyédraux et bornés de $\mathbb{R}^{n_i}$ donnés.

Nous remarquons que si les contraintes $e'_j x = s_j$ étaient ignorées, nous pourrions décomposer le problème (3.12) en sous-problèmes indépendants.
Afin d'éliminer ces contraintes, déterminons le problème dual du problème (3.12).

Soit u le vecteur des multiplicateurs de Lagrange (de longueur r), associé aux contraintes $e'_j x = s_j, \quad j = 1, \cdots, r$.

La fonction lagrangienne L du problème est donnée par

$$L(x, u) = \sum_{i=1}^{m} F_i(x_i) + \sum_{j=1}^{r} u_j (e'_j x - s_j) .$$

Et la fonction duale s'écrit

$$\begin{aligned} q(u) &= \min_{x_i \in P_i} \{ \sum_{i=1}^{m} F_i(x_i) + \sum_{j=1}^{r} u_j (e'_j x - s_j) \} \\ &= \sum_{i=1}^{m} q_i(u) - u's \end{aligned}$$

$$\text{où} \qquad u's = \sum_{j=1}^{r} u_j s_j ,$$

$$\text{et} \qquad q_i(u) \quad = \quad \min_{x_i \in P_i} \{F_i(x_i) + \sum_{j=1}^{r} u_j e'_{ji} x_i\}, \quad i = 1, \cdots, m \tag{3.13}$$

où e_{ji} représente le sous-vecteur de e_j (de longueur n_i) qui correspond à x_i.

Le problème dual a alors la forme

$$\begin{array}{ll} \text{maximiser}_u & q(u) \\ \text{sous contrainte} & \\ & u \in I\!R^r \,. \end{array} \tag{3.14}$$

Observons que la structure séparable du problème convient à la mise en parallèle des calculs nécessaires à l'évaluation de la fonction duale. Nous pouvons affecter un processeur séparé à chaque composante $q_i(u)$ de $q(u)$.

Les fonctions F_i étant strictement convexes, par application des théorèmes B.1 et B.2, nous avons que la fonction duale est continûment différentiable, et que si le minimum dans l'équation (3.13) est atteint au point $x_i(u)$, alors la dérivée partielle de q par rapport à u_j est donnée par

$$\frac{\partial q(u)}{\partial u_j} = e'_j x(u) - s_j$$
$$\text{où} \quad x(u) = (x_i(u), \cdots, x_m(u)) \,.$$

Puisque la fonction duale est différentiable, nous pouvons par exemple appliquer l'algorithme du gradient (c'est-à-dire l'équation (2.1) mais sans la projection $[.]^+$), et effectuer une implémentation en parallèle. Ceci est possible, car contrairement au problème primal (3.12), le problème dual (3.14) est sans contrainte.

Remarque :

Si le problème primal (3.12) avait des contraintes d'inégalité à la place des contraintes d'égalité, le problème dual aurait alors des contraintes de positivité, et nous appliquerions la méthode du gradient projeté, avec mise en parallèle.

3.3 Algorithme proximal de minimisation

Attardons-nous désormais au cas où la fonction coût primale n'est pas strictement convexe. Nous aimerions néanmoins lui faire jouir de cette propriété, afin de rendre le coût dual différentiable. A cet effet, notre approche consiste à lui ajouter un terme quadratique. Dans cette section, nous utilisons cette démarche pour développer un algorithme appelé l'algorithme proximal de minimisation.

Considérons le problème

$$\begin{array}{ll} \text{minimiser} & F(x) \\ \text{sous contrainte} & \\ & x \in X \end{array}$$

où $F : I\!R^n \rightarrow I\!R$ est une fonction convexe donnée, et X un ensemble convexe, fermé et non vide.

Introduisons un vecteur additionnel y de longueur n, et considérons le problème d'optimisation équivalent suivant :

$$\begin{array}{ll} \text{minimiser} & F(x) + \frac{1}{2c}||x-y||_2^2 \\ \text{sous contraintes} & \\ & x \in X \\ & y \in I\!R^n \end{array}$$

où c est un scalaire strictement positif et $||.||_2$ la norme euclidienne.

Nous pouvons résoudre ce problème par la méthode non linéaire de Gauss-Seidel de la section 2.5, qui minimise alternativement le coût sur tout $x \in X$, en gardant y fixé, puis le coût sur tout vecteur $y \in I\!R^n$, en gardant x fixé.
La méthode est donnée par

$$\begin{cases} x(t+1) = \arg\min_{x \in X} \{F(x) + \frac{1}{2c}||x - y(t)||_2^2\} \\ y(t+1) = x(t+1) \end{cases}$$

ou encore, de manière équivalente ,

$$x(t+1) = \arg\min_{x\in X}\{F(x) + \frac{1}{2c}||x - x(t)||_2^2\} . \tag{3.15}$$

Nous montrerons dans la proposition 3.1 qu'un seul point atteint le minimum dans l'équation (3.15), quel que soit le vecteur $x(t)$ de $I\!R^n$ donné.
Par conséquent, la méthode est bien définie.

Remarque :

Lorsque la fonction cout F est linéaire, un calcul simple montre que l'itération (3.15) peut être écrite comme

$$x(t+1) = [x(t) - c\nabla F(x(t))]^+$$

où $[.]^+$ désigne la projection sur l'ensemble X. Ainsi, dans ce cas, nous pouvons voir l'algorithme (3.15) comme une itération du gradient projeté.

En supposant que F est continûment différentiable, nous pouvons appliquer le résultat de convergence de l'algorithme non linéaire de Gauss-Seidel (Prop. 2.9), car la fonction coût $F(x) + \frac{1}{2c}||x - y||_2^2$ est strictement convexe par rapport à x en gardant y fixé, et strictement convexe par rapport à y en gardant x fixé.

D'autre part, même dans le cas où F n'est pas différentiable, et même si c croît d'une itération à l'autre, l'algorithme (3.15) converge, comme nous le montre entre autres la proposition suivante.

Proposition 3.1 :

Soit $F : I\!R^n \rightarrow I\!R$ une fonction convexe, et soit X un ensemble convexe, fermé, et non vide.
Notons par X^* l'ensemble des points qui minimisent $F(x)$ sur tout $x \in X$, c'est-à-dire

$$X^* = \{x^* \in X | F(x^*) \leq F(x),\ \forall\, x \in X\} .$$

Alors :

a) Quels que soient $y \in I\!R^n$ et c strictement positif, le minimum de $F(x) + \frac{1}{2c}||x - y||_2^2$ sur tout $x \in X$ est atteint en un unique point, que nous notons $x(y, c)$.

b) La fonction $\phi_c : I\!R^n \to I\!R$ définie par

$$\phi_c(y) = \min_{x \in X} \{F(x) + \frac{1}{2c}||x - y||_2^2\} \tag{3.16}$$

est convexe et continûment différentiable, et son gradient est donné par

$$\nabla\phi_c(y) = \frac{y - x(y, c)}{c} \; . \tag{3.17}$$

De plus, x^* minimise $\phi_c(y)$ sur tout $y \in I\!R^m$ si et seulement si x^* minimise $F(x)$ sur tout $x \in X$, autrement dit

$$X^* = \{x^* | \phi_c(x^*) = \min_{y \in I\!R^n} \; \phi_c(y)\}, \; \forall \; c > 0 \; .$$

c) Supposons que X^* est non vide.
Une suite générée par l'itération

$$x(t+1) = \arg\min_{x \in X}\{F(x) + \frac{1}{2c(t)}||x - x(t)||_2^2\} \tag{3.18}$$

où $\{c(t)\}$ est une suite de nombres strictement positifs, vérifiant $\liminf_{t \to \infty} \; c(t) > 0$, converge vers un élément de X^*.

d) Supposons que X^* est non vide, et qu'il existe un scalaire β strictement positif tel que

$$F(x) \geq F^* + \beta\rho(x; X^*), \; \forall \; x \in X \tag{3.19}$$

où

$$F^* = \min_{x \in X} \; F(x) \text{ et } \rho(x; X^*) = \min_{x^* \in X^*} ||x - x^*||_2 \; .$$

Alors :

$$x(y, c) = \arg\min_{x \in X^*} ||x - y||_2, \quad \text{si } \rho(y; X^*) \leq c\beta \; .$$

En particulier, l'algorithme (3.18) converge en un nombre fini d'itérations (autrement dit il existe $\bar{t} > 0$ dépendant de $x(0)$ tel que $x(t) \in X^*$, $\forall \; t \geq \bar{t}$), et, pour un $x(0)$ donné, il converge en une seule itération si $c(0)$ est suffisamment grand.

Avant d'entamer la démonstration qui est assez longue, faisons quelques commentaires et remarques.

1. La condition (3.19) tient dans le cas d'un problème de programmation linéaire, c'est-à-dire lorsque F est une fonction linéaire et X un ensemble polyédral.

2. L'opérateur qui assigne à y l'unique point $x(y,c)$ qui fournit le minimum dans la définition (3.16) de ϕ_c est connu sous le nom d'opérateur proximal. Ceci explique le nom d'*algorithme proximal de minimisation* pour l'itération (3.18).

3. Lorsque $c(t)$ est constant (disons $c(t) = c, \ \forall\ t$), en nous basant sur l'expression du gradient (3.17), nous pouvons écrire l'algorithme proximal de minimisation (3.18) comme

$$x(t+1) = x(t) - c\nabla\phi_c(x(t)) \ .$$

   Par conséquent, nous pouvons voir cet algorithme comme une méthode du gradient pour minimiser ϕ_c.

4. La vitesse de convergence de l'algorithme (3.18) dépend évidemment de la valeur du paramètre c.
   La convergence est plus rapide lorsque c croît. De plus, l'expérience a montré qu'il vaut mieux utiliser une suite croissante $\{c(t)\}$ plutôt qu'une valeur constante de c. Remarquons cependant qu'une très grande valeur de c peut engendrer des difficultés numériques lors de la minimisation de $F(x) + \frac{1}{2c}||x-y||_2^2$.

5. L'interprétation du gradient (3.17) suggère aussi la variante

$$x(t+1) = x(t) - \gamma(t)\nabla\phi_c(c(t))$$

   où $\gamma(t)$ est un paramètre de valeur de pas, qui peut être différent de c.

Nous terminons cette section par la démonstration de la proposition 3.1.

Preuve de a) :

- Montrons que $\forall\ c > 0$ et $\forall\ y \in I\!R^n$, les ensembles de niveau

$$\{x \in X | F(x) + \frac{1}{2c}||x-y||_2^2 \leq \alpha\}, \quad \alpha \in I\!R$$

sont bornés.

Supposons par l'absurde le contraire, c'est-à-dire que pour un certain scalaire $c > 0$ et un certain vecteur $y \in I\!R^n$, il existe une suite $\{x^k\}$ telle que

$$||x^k - y||_2 \to \infty, \quad F(x^k) + \frac{1}{2c}||x^k - y||_2^2 \leq \alpha, \; \forall \, k \, . \tag{3.20}$$

Notons $\beta_k = ||x^k - y||_2$, et supposons sans perte de généralité que $\beta_k \geq 1$, $\forall \, k$.
Définissons $z^k = \frac{x^k - y}{\beta_k}$ et considérons la fonction convexe $\hat{F}(x) = F(x + y)$.
De l'inéquation (3.20), nous obtenons

$$\hat{F}(\beta_k z^k) + \frac{(\beta_k)^2}{2c} = \hat{F}(x^k - y) + \frac{1}{2c}||x^k - y||_2^2 \leq \alpha, \; \forall \, k \, . \tag{3.21}$$

De plus, nous avons

$$\begin{aligned}
\min_{||z||_2 = 1} \hat{F}(z) &\leq \hat{F}(z^k) \quad \text{car } ||z^k||_2 = 1 \text{ par construction} \\
&\leq \frac{1}{\beta_k}\hat{F}(\beta_k z^k) + (1 - \frac{1}{\beta_k})\hat{F}(0) \quad \text{car } \hat{F} \text{ est convexe}
\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$(1 - \beta_k)\hat{F}(0) + \beta_k \min_{||z||_2 = 1} \hat{F}(z) \leq \hat{F}(\beta_k z^k) \, .$$

En combinant cette relation avec l'équation (3.21), nous obtenons

$$\hat{F}(0) + \beta_k(\min_{||z||_2 = 1} \hat{F}(z) - \hat{F}(0)) + \frac{(\beta_k)^2}{2c} \leq \alpha, \; \forall \, k \, .$$

Or $\beta_k \to \infty$.

Par conséquent, nous obtenons la contradiction désirée.

- Il suit alors que nous pouvons restreindre la minimisation de $F(x) + \frac{1}{2c}||x - y||_2^2$ à un sous-ensemble compact de X.
  Or, F est une fonction continue car F est convexe par hypothèse (Prop. A.11).
  D'autre part, la fonction $x \to \frac{1}{2c}||x - y||_2^2$ est strictement convexe sur X (Prop. A.6.d)) et donc aussi continue (Prop. A.11).
  Par conséquent, l'existence du point $x(y, c)$ demandé suit car une fonction continue sur un ensemble compact atteint son minimum.

- Enfin, l'unicité de ce minimum est garantie par la convexité stricte de la fonction à minimiser (Prop. A.7). ∎

Preuve de b) :

- Montrons d'abord que ϕ_c est convexe. Pour cela, prenons y_1 et y_2 arbitraires dans $I\!R^n$, et soit $\lambda \in [0,1]$.
  Notons $x_1 = x(y_1, c)$ et $x_2 = x(y_2, c)$.
  Nous avons alors

$$
\begin{aligned}
& \lambda\phi_c(y_1) + (1-\lambda)\phi_c(y_2) \\
= \; & \lambda[F(x_1) + \frac{1}{2c}||x_1 - y_1||_2^2] + (1-\lambda)[F(x_2) + \frac{1}{2c}||x_2 - y_2||_2^2] \\
\geq \; & F(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) + \frac{1}{2c}||\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 - \lambda y_1 - (1-\lambda)y_2||_2^2 \\
& \text{car } F \text{ est } ||.||_2 \text{ sont convexes} \\
\geq \; & \min_{x \in X}\{F(x) + \frac{1}{2c}||x - \lambda y_1 - (1-\lambda)y_2||_2^2\} \\
= \; & \phi_c(\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2) \; .
\end{aligned}
$$

  Ceci prouve la convexité de ϕ_c.

- Montrons ensuite que ϕ_c est différentiable. Pour cela, prenons y et d arbitraires dans $I\!R^n$, et soit $\alpha > 0$.
  Nous avons

$$
\begin{aligned}
& F(x(y,c)) + \tfrac{1}{2c}||x(y,c) - (y + \alpha d)||_2^2 \\
& \geq \phi_c(y + \alpha d) \geq \phi_c(y) + \alpha\phi_c'(y; d) \\
& = F(x(y,c)) + \tfrac{1}{2c}||x(y,c) - y||_2^2 + \alpha\phi_c'(y; d)
\end{aligned}
\tag{3.22}
$$

  où la seconde inégalité suit de la convexité de ϕ_c et de la définition de la dérivée directionnelle $\phi_c'(y; d)$.
  En développant la forme quadratique située à gauche dans la relation (3.22), en réarrangeant les termes, et en divisant par $\alpha > 0$, nous obtenons

$$
\left[\frac{y - x(y,c)}{c}\right]' d + \frac{\alpha}{2c}||d||_2^2 \geq \phi_c'(y; d), \; \forall\, \alpha > 0, \; \forall\, d \in I\!R^n \; .
$$

Prenons la limite pour $\alpha \to 0$.
Nous avons alors

$$\left[\frac{y - x(y,c)}{c}\right]' d \geq \phi_c'(y; d), \ \forall\, d \in I\!R^n \,.$$

Remplaçons d par $-d$ dans la relation précédente.
Nous obtenons

$$-\left[\frac{y - x(y,c)}{c}\right]' d \geq \phi_c'(y; d) \geq -\phi_c'(y; d)$$

où la dernière inégalité est une propriété de la dérivée directionnelle.
Des deux dernières relations, nous déduisons

$$\left[\frac{y - x(y,c)}{c}\right]' d = \phi_c'(y; d), \ \forall\, d \in I\!R^n \,.$$

Autrement dit, ϕ_c est différentiable et son gradient au point y vaut $\frac{y-x(y,c)}{c}$.
Nous avons par conséquent aussi montré (3.17). Nous remarquons encore que comme ϕ_c est une fonction convexe, son gradient est continu (Prop. A.12).
ϕ_c est donc continûment différentiable.

- Finalement, montrons que les points qui fournissent le minimum de $\phi_c(y)$ sur $I\!R^n$ et de $F(x)$ sur X coïncident.
  Remarquons que pour $x = y$, la fonction $F(x) + \frac{1}{2c}||x - y||_2^2$ prend la valeur $F(y)$.
  Ceci entraîne que

$$\phi_c(y) \leq F(y), \ \forall\, y \in X \,. \tag{3.23}$$

D'où, si y^* minimise $F(x)$ sur tout $x \in X$, alors nous avons

$$\begin{aligned} \phi_c(y^*) \leq F(y^*) \leq F(x(y,c)) \ &\leq \ F(x(y,c)) + \frac{1}{2c}||x(y,c) - y||_2^2 \\ &= \ \phi_c(y), \ \forall\, y \in I\!R^n \,, \end{aligned}$$

ce qui implique que y^* minimise $\phi_c(y)$ sur $I\!R^n$.

Inversement, si y^* minimise $\phi_c(y)$ sur $I\!R^n$, alors $c\nabla\phi_c(y^*) = y^* - x(y^*, c) = 0$.
Ceci implique que $y^* \in X$, et que

$$\phi_c(y^*) = F(x(y^*, c)) + \frac{1}{2c}||x(y^*, c) - y^*||_2^2 = F(y^*) .$$

Ainsi, nous avons en utilisant aussi l'inéquation (3.23)

$$F(y^*) = \phi_c(y^*) \leq \phi_c(y) \leq F(y), \ \forall\, y \in X .$$

Par conséquent, y^* minimise $F(y)$ sur tout $y \in X$. ∎

Preuve de c) :

- Montrons que toutes les valeurs d'adhérence de $\{x(t)\}$ appartiennent à X^*.
  En utilisant l'équation (3.18), nous avons

$$\begin{aligned} &F(x(t+1)) + \tfrac{1}{2c(t)}||x(t+1) - x(t)||_2^2 \\ &\leq F(x) + \tfrac{1}{2c(t)}||x - x(t)||_2^2, \ \forall\, x \in X . \end{aligned} \tag{3.24}$$

En mettant $x = x(t)$ dans cette relation, nous obtenons

$$F(x(t+1)) + \frac{1}{2c(t)}||x(t+1) - x(t)||_2^2 \leq F(x(t)), \ \forall\, t .$$

Soit $\{x(t)\}_{t \in T}$ une sous-suite qui converge vers un vecteur $x_\infty \in X$.
F étant continue car convexe (Prop. A.11), il suit de la relation précédente que $F(x(t))$ décroît de façon monotone vers $F(x_\infty)$, et que

$$\lim_{t \to \infty} ||x(t+1) - x(t)||_2 = 0 . \tag{3.25}$$

De plus, l'équation (3.26) implique que la sous-suite $\{x(t+1)\}_{t \in T}$ converge aussi vers x_∞.
Prenons x^* dans X^* arbitraire, et soit $\lambda \in (0, 1)$.
En mettant $x = \alpha x^* + (1 - \alpha)x(t+1)$ dans la relation (3.24), et en utilisant la convexité de F, nous obtenons

$$\begin{aligned} &F(x(t+1)) + \frac{1}{2c(t)}||x(t+1) - x(t)||_2^2 \\ &\leq \alpha F(x^*) + (1-\alpha)F(x(t+1)) + \frac{1}{2c(t)}||\alpha(x^* - x(t+1)) + x(t+1) - x(t)||_2^2 . \end{aligned}$$

Prenons la limite pour $t \to \infty, t \in T$, et utilisons l'équation (3.26).
Nous obtenons

$$F(x_\infty) - F(x^*) \leq \frac{\alpha||x^* - x_\infty||_2^2}{2 \liminf_{t\to\infty} c(t)}, \; \forall\, \alpha \in (0,1)\,.$$

Puisque cette relation tient $\forall\, \alpha \in (0,1)$, il suit que $F(x_\infty) = F(x^*)$, ce qui implique que $x_\infty \in X^*$.
Nous avons donc prouvé que toute valeur d'adhérence de $\{x(t)\}$ est une solution optimale.

- Il reste à montrer que la suite $\{x(t)\}$ converge.
  Pour cela, il suffit de montrer que $\{x(t)\}$ est bornée et admet une seule valeur d'adhérence (Prop. A.1 b)).
  De la relation (3.24), nous obtenons

$$||x(t+1) - x(t)||_2 \leq ||x - x(t)||_2, \; \forall\, x \in X \tag{3.26}$$

tel que

$$F(x) \leq F(x(t+1))\,.$$

Il suit que $x(t+1)$ est la projection de $x(t)$ sur l'ensemble convexe

$$\{x \in X | F(x) \leq F(x(t+1))\}\,.$$

D'où, par le théorème de projection (Prop. A.2 b)), nous obtenons

$$(x(t+1) - x(t))'(x - x(t+1)) \geq 0, \; \forall\, x \in X \tag{3.27}$$

tel que

$$F(x) \leq F(x(t+1))\,.$$

Or, pour chaque solution optimale $x^* \in X^*$, nous avons

$$\begin{aligned} ||x^* - x(t)||_2^2 &= ||x^* - x(t+1)||_2^2 + ||x(t+1) - x(t)||_2^2 \\ &+ 2(x(t+1) - x(t))'(x^* - x(t+1))\,. \end{aligned}$$

Ainsi, en utilisant l'inéquation (3.27) dans cette relation, nous obtenons

$$||x^* - x(t+1)||_2 \leq ||x^* - x(t)||_2, \; \forall \; x^* \in X^* \; . \tag{3.28}$$

Nous déduisons de cette équation que la suite $\{x(t)\}$ est bornée. Elle doit donc avoir une ou plusieurs valeurs d'adhérence.
Nous avons déjà prouvé que toutes les valeurs d'adhérence de $\{x(t)\}$ appartiennent à X^*.
Si x^* est une valeur d'adhérence, alors la relation (3.28) implique que la distance de $x(t)$ à x^* ne peut croître à aucune itération.
Par conséquent, $\{x(t)\}$ ne peut admettre une seconde valeur d'adhérence, et doit donc converger vers x^*. ■

Preuve de d) :

- Remarquons d'abord que la fonction $\rho(x; X^*) = \min_{x^* \in X^*} ||x - x^*||_2$ est convexe. Pour cela, prenons y_1, y_2 arbitraires dans X et $\lambda \in [0, 1]$, et montrons que

$$\rho(\lambda y_1 + (1-\lambda) y_2 : X^*) \leq \lambda \rho(y_1; X^*) + (1-\lambda)\rho(y_2; X^*) \; .$$

Nous avons

$$\begin{aligned} \rho(\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2; X^*) &= \min_{x^* \in X^*} ||\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2 - x^*||_2 \\ &= \min_{x^* \in X^*} ||\lambda(y_1 - x^*) + (1-\lambda)(y_2 - x^*)||_2 \\ &\leq \lambda \min_{x^* \in X^*} ||y_1 - x^*||_2 + (1-\lambda) \min_{x^* \in X^*} ||y_2 - x^*||_2 \\ &= \lambda \rho(y_1; X^*) + (1-\lambda)\rho(y_2; X^*) \; . \end{aligned}$$

- D'autre part, $\nabla \rho(x; X^*) = \frac{x - \hat{x}}{\rho(x; X^*)}$, $\forall \; x \notin X^*$ où $\hat{x}$ représente l'unique projection de x sur X^*.
En effet, différentions l'équation

$$\rho(x; X^*) = \sqrt{2c\hat{\phi}_c(x)} \; , \text{où} \; \hat{\phi}_c(x) = \min_{x^* \in X^*} \frac{1}{2c} ||x - x^*||_2^2 \; .$$

Nous obtenons

$$\nabla \rho(x; X^*) = \frac{c \nabla \hat{\phi}_c(x)}{\sqrt{2c\hat{\phi}_c(x)}} = \frac{c \nabla \hat{\phi}_c(x)}{\rho(x; X^*)} \; .$$

Or, $\nabla \hat{\phi}_c(x) = \frac{x - \hat{x}}{c}$ (cfr équation (3.17)).
D'où, le résultat suit en remplaçant $\nabla \hat{\phi}_c(x)$ par sa valeur dans la relation précédente.

- Considérons la fonction $\tilde{\phi}_c : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par

$$\tilde{\phi}_c(y) = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \{F^* + \beta\rho(x; X^*) + \frac{1}{2c}||x - y||_2^2\} .$$

De la partie a) de la proposition, nous avons que le minimum dans la définition de $\tilde{\phi}_c(y)$ est atteint en un unique point, noté $\tilde{x}(y,c)$.

- Montrons que si $\rho(y; X^*) \leq c\beta$, alors $\tilde{x}(y,c) \in X^*$, ou de manière équivalente, que si $\tilde{x}(y,c) \notin X^*$, alors $\rho(y; X^*) > c\beta$.

Supposons que $\tilde{x}(y,c) \notin X^*$.
Annulons le gradient de $F^* + \beta\rho(x; X^*) + \frac{1}{2c}||x - y||_2^2$ en $\tilde{x}(y,c)$.
Nous obtenons

$$\frac{\beta(\tilde{x}(y,c) - \hat{x}(y,c))}{\rho(\tilde{x}(y,c); X^*)} + \frac{\tilde{x}(y,c) - y}{c} = 0 ,$$

où $\hat{x}(y,c)$ est la projection de $\tilde{x}(y,c)$ sur X^*. Il suit que $||\tilde{x}(y,c) - y||_2 = c\beta$ car

$$\rho(\tilde{x}(y,c); X^*) = ||\tilde{x}(y,c) - \hat{x}(y,c)||_2 .$$

En utilisant l'analogue à l'inéquation (3.26) où $F(x)$ est remplacé par $F^* + \beta\rho(x; X^*)$, nous avons que $\tilde{x}(y,c)$ est la projection de y sur l'ensemble
$\{\tilde{x} \in X \,|\, \rho(\tilde{x}; X^*) \leq \rho(\tilde{x}(y,c); X^*)\}$, qui contient X^*.
Par conséquent, $\rho(y; X^*) > ||\tilde{x}(y,c) - y||_2 = c\beta$. Nous avons donc montré que

$$\tilde{x}(y,c) \notin X^* \Rightarrow \rho(y; X^*) > c\beta .$$

- Supposons maintenant que la condition (3.19) tient.
Montrons que si $\tilde{x}(y,c) \in X^*$, alors $x(y,c) = \tilde{x}(y,c)$.

D'une part, la condition (3.19) implique que

$$\tilde{\phi}_c(y) \leq \phi_c(y) \leq F(x) + \frac{1}{2c}||x - y||_2^2, \ \forall\, x \in X .$$

D'un autre côté, si $\tilde{x}(y,c) \in X^*$, alors

$$
\begin{aligned}
\tilde{\phi}_c(y) &= F^* + \beta\rho(\tilde{x}(y,c); X^*) + \frac{1}{2c}||\tilde{x}(y,c) - y||_2^2 \\
&= F(\tilde{x}(y,c)) + \frac{1}{2c}||\tilde{x}(y,c) - y||_2^2 \,.
\end{aligned}
$$

Nous concluons que le minimum de $F(x) + \frac{1}{2c}||x - y||_2^2$ est atteint en $\tilde{x}(y,c)$. Par conséquent, $\tilde{x}(y,c) = x(y,c)$.

- Nous avons donc finalement que si $\rho(y; X^*) \leq c\beta$, alors $x(y,c) \in X^*$.

Or, puisque $x(y,c)$ minimise $F(x) + \frac{1}{2c}||x - y||_2^2$ sur X, nous obtenons que

$$
||x(y,c) - y||_2 \leq ||x^* - y||_2, \ \forall \ x^* \in X^* \,.
$$

Par conséquent, $x(y,c)$ est la projection de y sur X^*, autrement dit

$$
x(y,c) = \arg\min_{x \in X^*} ||x - y||_2 \,.
$$

■

3.4 Méthode du Langrangien augmenté

Nous envisageons maintenant une approche duale pour traiter du cas où le coût primal n'est pas strictement convexe. Ici encore, nous ajoutons un terme quadratique au cot primal. Et nous montrerons que l'algorithme obtenu est en fait équivalent à l'algorithme proximal de minimisation.

Considérons le problème

$$\begin{array}{ll} \text{minimiser}_x & F(x) \\ \text{sous contraintes} & \\ & e_j' x = s_j \ , \ j = 1, \cdots, m \\ & x \in P \end{array} \tag{3.29}$$

où $F : I\!R^n \rightarrow I\!R$ est une fonction convexe, les e_j sont des vecteurs de longueur n donnés, les s_j sont des scalaires donnés, et P est un sous-ensemble polyédral, borné, et non vide de $I\!R^n$.

Nous remplaçons le problème de départ par le problème d'optimisation équivalent suivant :

$$\begin{array}{ll} \text{minimiser}_x & F(x) + \frac{c}{2}||Ex - s||_2^2 \\ \text{sous contraintes} & \\ & Ex = s \\ & x \in P \end{array}$$

où c est un scalaire strictement positif et $Ex = s$ une notation compacte pour désigner les contraintes $e_j' x = s_j$. Autrement dit, E est la matrice de dimensions (m, n) dont les lignes sont les transposés des vecteurs e_j et s est le vecteur de longueur m composé des scalaires s_j.

Soit p le vecteur des multiplicateurs de Lagrange (de longueur m) associé à la contrainte $Ex = s$.

Le problème dual s'écrit alors

$$\text{maximiser}_p \qquad q_c(p) = \inf{}_{x\in P} \; L_c(x,p)$$

sous contrainte

$$p \in I\!R^m$$

où $L_c(x,p) = F(x) + p'(Ex-s) + \frac{c}{2}||Ex-s||_2^2$.

La fonction $L_c(x,p)$ est appelée le *Lagrangien augmenté.*

Une méthode importante utilisant le Lagrangien augmenté est appelée la *méthode des multiplicateurs.* Elle consiste en minimisations successives de la forme

$$x(t+1) = \arg\min_{x\in P} \; L_c(x,p(t)) \tag{3.30}$$

suivies par des mises à jour du vecteur $p(t)$ selon l'itération

$$p(t+1) = p(t) + c(t)(Ex(t+1) - s)\;. \tag{3.31}$$

Le vecteur initial $p(0)$ est arbitraire, et $\{c(t)\}$ est une suite croissante de nombres strictement positifs.

Remarquons que le minimum du Lagrangien augmenté dans l'équation (3.30) est atteint car cette fonction est continue et P est compact.

Montrons que l'itération (3.30)-(3.31) n'est rien d'autre que l'algorithme proximal de minimisation (3.18) de la section 3.3 déguisé.

A cet effet, introduisons un vecteur auxiliaire z de longueur m, et écrivons

$$\begin{aligned} \min_{x\in P} L_{c(t)}(x,p(t)) &= \min_{x\in P}\{F(x) + p(t)'(Ex-s) + \frac{c(t)}{2}||Ex-s||_2^2\} \\ &= \min_{Ex-s=z,x\in P,z\in I\!R^m}\{F(x) + p(t)'z + \frac{c(t)}{2}||z||_2^2\}\;. \end{aligned} \tag{3.32}$$

Nous voyons le problème du membre de droite de la relation (3.32) comme un problème d'optimisation en les variables x et z, soumis à des contraintes.
Le couple de vecteurs $(x(t+1), z(t+1))$ où

$$z(t+1) = Ex(t+1) - s \tag{3.33}$$

est une solution optimale de ce problème.

Soit $\overline{y}$ une solution optimale du dual (L'existence d'un tel vecteur solution (de longueur m) est garantie par le théorème de dualité B.4).

Nous avons

$$\begin{aligned} \overline{y} &= \arg \max_{y \in I\!R^m} \{ \min_{x \in P, z \in I\!R^m} \{F(x) + y'(Ex - s - z) \\ &\qquad\qquad + p(t)'z + \frac{c(t)}{2} ||z||_2^2 \} \} \\ &= \arg \max_{y \in I\!R^m} \{ \min_{x \in P} \{F(x) + y'(Ex - s)\} \\ &\qquad\qquad + \min_{z \in I\!R^m} \{(p(t) - y)'z + \frac{c(t)}{2} ||z||_2^2 \} \} \ . \end{aligned} \tag{3.34}$$

$z(t+1)$ atteint le minimum de $\{(p(t) - y)'z + \frac{c(t)}{2} ||z||_2^2\}$ sur tout $z \in I\!R^m$ lorsque $y = \overline{y}$.

Par conséquent, $z(t+1) = \frac{\overline{y} - p(t)}{c(t)}$ ou encore, en utilisant les équations (3.31) et (3.33)

$$\overline{y} = p(t+1) \ . \tag{3.35}$$

D'autre part, un calcul simple montre que

$$\min_{z \in I\!R^m} \{(p(t) - y)'z + \frac{c(t)}{2} ||z||_2^2\} = -\frac{1}{2c(t)} ||y - p(t)||_2^2 \ .$$

Ainsi, nous obtenons des relations (3.34) et (3.35)

$$p(t+1) = \arg \max_{y \in I\!R^m} \{q(y) - \frac{1}{2c(t)} ||y - p(t)||_2^2\} \tag{3.36}$$

où $q(y)$ est la fonction duale du problème de départ (3.29) :

$$q(y) = \min_{x \in P} \{F(x) + y'(Ex - s)\} \ .$$

La relation (3.36) montre que l'itération des multiplicateurs (3.30)-(3.31) est équivalente à l'algorithme proximal de minimisation appliqué au problème de la minimisation de la fonction convexe $-q$ (car la fonction duale q est concave), ou bien au problème dual de maximisation de q.

Par application du résultat de convergence de la prop. 3.1 c), nous voyons d'autre part que la suite $\{p(t)\}$ générée par la méthode des multiplicateurs converge vers une solution optimale du dual.
Nous pourrions montrer que dans le cas d'un problème de programmation linéaire, la convergence se réalise en un nombre fini d'itérations.

Montrons maintenant que toute valeur d'adhérence de la suite $\{x(t)\}$ générée par la méthode des multiplicateurs est une solution optimale du problème primal (3.29).

Pour cela, remarquons d'abord que de la formule de mise à jour des multiplicateurs (3.31), nous obtenons $c(t)(Ex(t+1)-s) \to 0$ et $Ex(t+1)-s \to 0$.

Nous avons aussi

$$L_{c(t)}(x(t+1), p(t)) = \min_{x \in P}\{F(x) + p(t)'(Ex - s) + \frac{c(t)}{2}||Ex - s||_2^2\} \ .$$

Ces deux dernières relations donnent

$$\lim_{t\to\infty} \sup F(x(t+1)) = \lim \sup_{t\to\infty} L_c(x(t+1), p(t)) \leq F(x) \ ,$$

$\forall\ x \in P$ tel que $Ex = s$.

D'où, si x^* est une valeur d'adhérence de $\{x(t)\}$, alors nous avons

$$F(x^*) \leq F(x) \ , \quad \forall\ x \in P \text{ tel que } Ex = s \ .$$

De plus, $Ex^* = s$ car $Ex(t+1) - s \to 0$.
Par conséquent, toute valeur d'adhérence x^* de la suite $\{x(t)\}$ est solution optimale du problème original.

<u>Commentaires sur la méthode</u>

La méthode des multiplicateurs donnée par (3.30) et (3.31) est une très bonne méthode qui s'applique à des problèmes d'optimisation sous contraintes, notamment dans un contexte beaucoup plus général que celui envisagé ici (Par exemple, elle peut être utilisée dans des problèmes faisant intervenir des fonctions coût non convexes).

Cette méthode comporte une suite de minimisations de $L_{c(t)}(x, p(t))$, mais comme chacun de ces problèmes de minimisation est soumis à moins de contraintes que le problème de départ (3.29), ils se résolvent plus facilement. Il est cependant nécessaire que la paramètre $c(t)$ ne soit pas trop grand, afin d'éviter que le problème de minimisation du Lagrangien augmenté ne soit mal conditionné.

L'expérience a montré qu'il vaut mieux commencer avec une valeur moyenne de c, et ensuite soit garder c constant, soit accroître c par un certain facteur (disons 2 à 10), lors de chaque minimisation du Lagrangien augmenté.

Il existe de nombreuses manières d'utiliser les résultats d'une minimisation lors de la minimisation suivante.

Un inconvénient de cette méthode est que même si la fonction coût $F(x)$ est séparable, le Lagrangien augmenté $L_c(., p(t))$ ne l'est pas, car il comprend le terme quadratique $||Ex - s||_2^2$. A l'aide d'une reformulation adéquate du problème de départ, il est néanmoins possible de préserver une structure séparable.

Nous terminons cette section par deux exemples.

Exemple 3.1 : *(Minimisation de la somme de fonctions convexes)*

Considérons le problème

$$\text{minimiser}_x \quad \sum_{i=1}^{m} F_i(x)$$

sous contraintes

$$x \in P_i \ , \ i = 1, \cdots, m$$

où les $F_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sont des fonctions convexes et les P_i des ensembles polyédraux et bornés de $\mathbb{R}^n$ donnés.

Introduisons des variables artificielles additionnelles $x_i \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, \cdots, m$, et considérons le problème séparable équivalent suivant :

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimiser}_{x_i} & \sum_{i=1}^{m} F_i(x_i) \\
\text{sous contraintes} & \\
& x_i = x \ , \ i = 1, \cdots, m \\
& x_i \in P_i \ , \ i = 1, \cdots, m
\end{array}
$$

Appliquons la méthode des multiplicateurs à ce problème. Les mises à jour des vecteurs (de longueur n) $p_i(t)$ s'effectuent selon l'itération

$$p_i(t+1) = p_i(t) + c(t)(x(t+1) - x_i(t+1)) \ , \ i = 1, \cdots, m$$

où $x_i(t+1)$ et $x(t+1)$ résolvent le problème

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimiser}_{x, x_i} & \sum_{i=1}^{m} \{F_i(x_i) + p_i(t)'(x - x_i) + \frac{c(t)}{2} ||x - x_i||_2^2\} \\
\text{sous contraintes} & \\
& x \in I\!R^n \\
& x_i \in P_i \ , \ i = 1, \cdots, m \ .
\end{array}
\tag{3.37}
$$

Remarquons que nous ne pouvons pas décomposer ce problème en minimisations séparées par rapport à certaines variables car il y a couplage entre x et les vecteurs x_i.

Cependant, nous pouvons profiter de la structure de produit cartésien de l'ensemble contrainte du problème (3.37).

En effet, considérons la méthode qui minimise d'abord le Lagrangien augmenté par rapport à x, autrement dit x est mis à jour selon l'itération

$$x := \frac{\sum_{i=1}^{m} x_i}{m} - \frac{\sum_{i=1}^{m} p_i(t)}{mc(t)} \ , \tag{3.38}$$

et minimise souvent le Lagrangien augmenté par rapport à x_i, suivant

$$x_i := \arg \min_{x_i \in P_i} \{F_i(x_i) - p_i(t)x_i + \frac{c(t)}{2} ||x - x_i||_2^2\} \ , \ i = 1, \cdots, m \ . \tag{3.39}$$

Ce processus est répété jusqu'au moment où la convergence vers un minimum du Lagrangien augmenté est obtenue.

Cette méthode présente l'avantage que les minimisations dans l'itération (3.39) peuvent s'effectuer en parallèle.

Exemple 3.2 : *(Problèmes séparables)*

Considérons le problème (3.12) de la section 3.2

$$\text{minimiser}_x \qquad \sum_{i=1}^{m} F_i(x_i)$$

sous contraintes

$$e_j'x = s_j \ , \ j = 1, \cdots, r$$

$$x_i \in P_i \ , \ i = 1, \cdots, m$$

avec la différence qu'ici les fonctions $F_i : \mathbb{R}^{n_i} \to \mathbb{R}$ sont uniquement convexes. Rappelons que $x \in \mathbb{R}^n$ se décompose en $(x_1, x_2, \cdots, x_m)$ où chaque sous-vecteur $x_i \in \mathbb{R}^{n_i}$, que les $e_j \in \mathbb{R}^n$, les $s_j \in \mathbb{R}$ et les P_i sont des sous-ensembles polyédraux et bornés de $\mathbb{R}^{n_i}$.

Soit $e_{ji} \in \mathbb{R}^{n_i}$ le sous-vecteur de e_j qui correspond à x_i.
Notons par $I(j)$ l'ensemble des indices i tels que x_i apparaît dans le jème contrainte $e_j'x = s_j$, c'est-à-dire

$$I(j) = \{i | e_{ji} \neq 0\} \ , \ j = 1, \cdots, r \ .$$

Introduisons des variables additionnelles réelles z_{ji} , $i \in I(j)$, afin de transformer le problème de départ comme suit

$$\text{minimiser}_x \qquad \sum_{i=1}^{m} F_i(x_i)$$

sous contraintes

$$e_{ji}'x_i = z_{ji} \ , \ j = 1, \cdots, r, \ \ i \in I(j)$$

$$\textstyle\sum_{i \in I(j)} z_{ji} = s_j \ , \ j = 1, \cdots, r$$

$$x_i \in P_i \ , \ i = 1, \cdots, m \ .$$

Pour chaque j allant de 1 à r, nous considérons les réels p_{ji} qui sont les multiplicateurs de Lagrange associés aux contraintes d'égalité $e_{ji}'x_i = z_{ji}$, $i \in I(j)$.

La méthode des multiplicateurs est alors donnée par

$$p_{ji}(t+1) = p_{ji}(t) + c(t)(e'_{ji}x_i(t+1) - z_{ji}(t+1)) \ , \ j = 1, \cdots, r \ , \ i \in I(j) \tag{3.40}$$

où $x_i(t+1)$ et $z_{ji}(t+1)$ minimisent le Lagrangien augmenté

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{m} F_i(x_i) \quad &+ \quad \sum_{j=1}^{r} \sum_{i \in I(j)} p_{ji}(t)(e'_{ji}x_i - z_{ji}) \\ &+ \quad \frac{c(t)}{2} \sum_{j=1}^{r} \sum_{i \in I(j)} (e'_{ji}x_i - z_{ji})^2 \ , \end{aligned}$$

sous contraintes $\sum_{i \in I(j)} z_{ji} = s_j$, $j = 1, \cdots, r$ et $x_i \in P_i$, $i = 1, \cdots, m$.

Comme dans l'exemple précédent (cfr itérations (3.38) et (3.39)), cette minimisation peut être effectuée de manière itérative en alternant les minimisations par rapport aux x_i et par rapport aux z_{ji}.
L'itération prend la forme

$$\begin{aligned} x_i := \arg \min_{\mu_i \in P_i} \{ F_i(\mu_i) + &\sum_{\{j | i \in I(j)\}} \{ p_{ji}(t) e'_{ji} \mu_i \\ &+ \frac{c(t)}{2} (e'_{ji}\mu_i - z_{ji})^2 \} \} \ , i = 1, \cdots, m \\ \{ z_{ji} | i \in I(j) \} := \arg &\min_{\{\nu_{ji} | i \in I(j), \sum_{i \in I(j)} \nu_{ji} = s_j\}} \{ - \sum_{i \in I(j)} p_{ji}(t) \nu_{ji} \\ &+ \frac{c(t)}{2} \sum_{i \in I(j)} (e'_{ji}x_i - \nu_{ji})^2 \} \ , \ j = 1, \cdots, r \ . \end{aligned} \tag{3.41}$$

La minimisation par rapport à $\{\nu_{ji} | i \in I(j)\}$ dans l'équation précédente peut être réalisée analytiquement.

Un calcul montre que le minimum est atteint pour

$$\nu_{ji} = e'_{ji}x_i + \frac{p_{ji}(t) - \lambda_j}{c(t)} \ , \ j = 1, \cdots, r, \ \ i \in I(j) \tag{3.42}$$

où les réels λ_j sont des multiplicateurs de Lagrange choisis de telle sorte que les contraintes $\sum_{i \in I(j)} \nu_{ji} = s_j$ soient satisfaites.

Après calculs, nous obtenons

$$\lambda_j = \frac{1}{m_j} \sum_{i \in I(j)} p_{ji}(t) + \frac{c(t)}{m_j} [\sum_{i \in I(j)} e'_{ji} x_i - s_j] \ , \ j = 1, \cdots, r \tag{3.43}$$

où m_j représente le cardinal de $I(j)$.

En utilisant les relations précédentes, simplifions la formule de mise à jour des p_{ji} (3.40).

Supposons que nous ayons trouvé les valeurs optimales $x_i(t+1)$. Alors, par l'itération (3.41), nous avons que les valeurs optimales $z_{ji}(t+1)$ sont données par

$$z_{ji}(t+1) = e'_{ji} x_i(t) + \frac{p_{ji}(t) - \lambda_j(t+1)}{c(t)} \ , \ j = 1, \cdots, r, \ \ i \in I(j)$$

où $\lambda_j(t+1)$ est donné par la relation (3.43) dans laquelle x_i est remplacé par $x_i(t+1)$.

En comparant cette équation avec (3.40), nous obtenons

$$p_{ji}(t+1) = \lambda_j(t+1) \quad j = 1, \cdots, r, \ \ i \in I(j) \ .$$

Nous pouvons donc utiliser la seule variable λ_j à la place de m_j variables $p_{ji}, i \in I(j)$.

En écrivant la formule de mise à jour des multiplicateurs (3.40) pour chaque $i \in I(j)$, nous obtenons après addition

$$\lambda_j(t+1) = \lambda_j(t) + \frac{c(t)}{m_j} [\sum_{i \in I(j)} (e'_{ji} x_i(t+1) - z_{ji}(t+1))] \ , \ j = 1, \cdots, r$$

ou encore

$$\lambda_j(t+1) = \lambda_j(t) + \frac{c(t)}{m_j} (e'_j x(t+1) - s_j) \ , \ j = 1, \cdots, r \ . \tag{3.44}$$

Remplaçons $p_{ji}(t)$ par $\lambda_j(t)$ dans les relations (3.42) et (3.43) et obtenons la formule de mise à jour suivante pour z_{ji}

$$z_{ji} := e'_{ji} x_i + \frac{\lambda_j(t) - \lambda_j}{c(t)} \ , \ j = 1, \cdots, r, \ \ i \in I(j) \ ,$$

où

$$\lambda_j = \lambda_j(t) + \frac{c(t)}{m_j} [\sum_{i \in I(j)} e'_{ji} x_i - s_j] \ , \ j = 1, \cdots, r \ .$$

En combinant ces deux relations, l'itération pour z_{ji} devient

$$z_{ji} := e'_{ji}x_i - \frac{1}{m_j}(e'_j x - s_j)\ ,\quad j = 1,\cdots,r,\quad i \in I(j)\ .$$

Servons-nous de cette formule pour éliminer z_{ji} de l'équation (3.41).

Finalement, nous obtenons pour x_i l'itération suivante

$$\begin{aligned} x_i := \arg\min_{\mu_i \in P_i} \{F_i(\mu_i) \quad &+ \sum_{\{j | i \in I(j)\}} \{\lambda_j(t) e'_{ji}\mu_i \\ &+ \frac{c(t)}{2}(e'_{ji}(\mu_i - x_i) + w_j)^2\}\}\ ,\ i = 1,\cdots,m\ . \end{aligned} \tag{3.45}$$

où

$$w_j = \frac{1}{m_j}(e'_j x - s_j)\ ,\ j = 1,\cdots,r\ , \tag{3.46}$$

qui convient très bien à la mise en parallèle.

3.5 Méthode des directions alternantes

Nous terminons ce chapitre par l'étude d'une variante de la méthode des multiplicateurs.

Reprenons l'exemple 3.1 de la section précédente qui comporte le problème

$$\text{minimiser}_x \qquad \sum_{i=1}^{m} F_i(x)$$

sous contraintes

$$x \in P_i \ , \ i = 1, \cdots, m \ .$$

Nous avons vu qu'une implémentation de la méthode des multiplicateurs pour ce problème met à jour alternativement x et x_i, et ne modifie les multiplicateurs $p_i(t)$ qu'après un nombre important de mises à jour de x et x_i (assez pour minimiser le Lagrangien augmenté avec une précision suffisante).

Une variante intéressante est de réaliser seulement un petit nombre de minimisations par rapport à x et x_i avant de mettre à jour les multiplicateurs.

Dans le cas extrême d'une seule minimisation, la méthode prend dans notre exemple la forme suivante :

$$x(t+1) = \frac{\sum_{i=1}^{m} x_i(t)}{m} - \frac{\sum_{i=1}^{m} p_i(t)}{mc} \tag{3.47}$$

$$x_i(t+1) = \arg\min_{x_i \in P_i} \{F_i(x_i) - p_i(t)x_i + \frac{c}{2}||x(t+1) - x_i||_2^2\} \ , \ i = 1, \cdots, m \tag{3.48}$$

$$p_i(t+1) = p_i(t) + c(x(t+1) - x_i(t+1)) \ , \ i = 1, \cdots, m \ . \tag{3.49}$$

Cette méthode opère en cycles. Dans chacun de ceux-ci, nous minimisons le Lagrangien augmenté d'abord par rapport à un ensemble de variables, ensuite par rapport aux variables qui restent, et enfin nous effectuons une mise à jour des multiplicateurs. Pour faire référence à ce type d'algorithme, nous utilisons le nom de *méthode (des multiplicateurs) des directions alternantes.*

Reprenons également le problème de l'exemple 3.2

$$\begin{array}{ll} \text{minimiser}_x & \sum_{i=1}^{m} F_i(x_i) \\ \text{sous contraintes} & \\ & e_j' x = s_j \ , \ j = 1, \cdots, r \\ & x_i \in P_i \ , \ i = 1, \cdots, m \ . \end{array}$$

La méthode des directions alternantes est dans ce cas donnée par (cfr équations (3.44)-(3.46))

$$x_i(t+1) = \arg \min_{x_i \in P_i} \{F_i(x_i) + \sum_{\{j | i \in I(j)\}} \{\lambda_j(t) e'_{ji} x_i + \frac{c}{2}(e'_{ji}(x_i - x_i(t)) + w_j(t))^2\}\} \ , \ i = 1, \cdots, m \tag{3.50}$$

$$\lambda_j(t+1) = \lambda_j(t) + c w_j(t) \ , \ j = 1, \cdots, r \tag{3.51}$$

où $$w_j(t) = \frac{1}{m_j}(e'_j x(t) - s_j) \ , \ j = 1, \cdots, r \ . \tag{3.52}$$

Les vecteurs initiaux $x(0)$ et $\lambda(0)$ sont arbitraires.

Nous voyons que cette méthode convient parfaitement à la mise en parallèle, et s'applique à des problèmes convexes séparables qui ne sont pas nécessairement strictement convexes.

Nous formulons maintenant plus précisément cette méthode et démontrons sa convergence.

Le point de départ est le problème d'optimisation suivant :

$$\begin{array}{ll} \text{minimiser}_x & G_1(x) + G_2(Ax) \\ \text{sous contraintes} & \\ & x \in C_1 \\ & Ax \in C_2 \end{array} \tag{3.53}$$

où $G_1 : I\!R^n \rightarrow I\!R$ et $G_2 : I\!R^n \rightarrow I\!R$ sont des fonctions convexes, A est une matrice de dimensions (m, n) donnée, C_1 et C_2 sont des sous-ensembles polyédraux non vides de $I\!R^n$

et $I\!R^m$, respectivement.

Nous faisons l'hypothèse suivante.

Hypothèse 3.1 :

a) L'ensemble X^* des solutions optimales du problème (3.53) est non vide.

b) Soit l'ensemble C_1 est borné, soit la matrice $A'A$ est inversible.

Introduisons un vecteur additionnel z de longueur m, et reformulons le problème (3.53)

$$\begin{array}{ll} \text{minimiser}_{x,z} & G_1(x) + G_2(z) \\ \text{sous contraintes} & \\ & x \in C_1 \\ & z \in C_2 \\ & Ax = z \; . \end{array}$$

Soit p le vecteur des multiplicateurs de Lagrange (de longueur m) associé à la contrainte $Ax = z$.

Le Lagrangien augmenté s'écrit alors

$$L_c(x, z, p) = G_1(x) + G_2(z) + p'(Ax - z) + \frac{c}{2}||Ax - z||_2^2 \; .$$

La méthode des directions alternantes est donnée par

$$x(t+1) = \arg\min_{x \in C_1}\{G_1(x) + p(t)'Ax + \frac{c}{2}||Ax - z(t)||_2^2\} \tag{3.54}$$

$$z(t+1) = \arg\min_{z \in C_2}\{G_2(z) - p(t)'z + \frac{c}{2}||Ax(t+1) - z||_2^2\} \tag{3.55}$$

$$p(t+1) = p(t) + c(Ax(t+1) - z(t+1)) \tag{3.56}$$

Les vecteurs initiaux $p(0)$ et $z(0)$ sont arbitraires, et c est un nombre strictement positif.

Remarquons que les fonctions G_1 et G_2 ainsi que les ensembles C_1 et C_2 ont été découplés dans les problèmes de minimisation des équations (3.54) et (3.55). Cela s'avère être très utile dans certains cas.

Nous avons par la prop. 3.1 a) que le minimum par rapport à z dans l'équation (3.55) est atteint. Le minimum par rapport à x dans l'équation (3.54) est aussi atteint si C_1 est compact, car une fonction continue sur un ensemble compact atteint sa borne inférieure, ou si $A'A$ est inversible, car dans ce cas, la matrice associée au terme quadratique de l'équation (3.54) est définie positive, et une légère modification de la preuve de la prop. 3.1 a) s'applique.
Par conséquent, sous l'hypothèse 3.1, les minima dans les équations (3.54) et (3.55) sont atteints, et l'algorithme est bien défini.

Nous n'envisageons pas de changer c d'une itération de l'algorithme à l'autre, car contrairement à la méthode des multiplicateurs, augmenter c n'est pas souvent utile. De plus, l'expérience montre qu'un nombre considérable d'essais peut s'avérer nécessaire avant de trouver le choix adéquat de c.

Remarque :

L'algorithme décrit par les équations (3.47)-(3.49) pour minimiser la somme de fonctions convexes $\sum_{i=1}^{m} F_i(x)$ sur $x \in \cap_{i=1}^{m} P_i$ est un cas particulier de la méthode générale des directions alternantes (3.54)-(3.56). Voici les identifications permettant de le retrouver :

$G_1(x) = 0$, $C_1 = I\!R^n$, A est la matrice de dimensions $(m.n, n)$ composée de matrices identité (n,n) , $G_2(z) = G_2(z_1, \cdots, z_m) = \sum_{i=1}^{m} F_i(z_i)$, et $C_2 = P_1 \times P_2 \times \cdots \times P_m$.

Les relations (3.50)-(3.52) pour minimiser la fonction séparable $\sum_{i=1}^{m} F_i(x_i)$ sous contraintes $Ex = s$ et $x_i \in P_i$, se déduisent elles aussi de la méthode des directions alternantes (3.54)-(3.56).
Nous pourrions vérifier par calculs qu'elles s'obtiennent avec les identifications suivantes :

$$G_1(x) = \sum_{i=1}^{m} F_i(x_i) \ , \ C_1 = P_1 \times P_2 \times \cdots \times P_m \ ,$$
$$G_2(z) = 0 \ , \ C_2 = \{z | \sum_{i \in I(j)} z_{ji} = s_j \ , \ j = 1, \cdots, r\} \ ,$$

et A est la matrice qui envoie x sur le vecteur dont les composantes sont les $e'_{ji} x_i$,

$j = 1, \cdots, r\ ,\quad i \in I(j)$.

La proposition suivante donne les propriétés principales de convergence de la méthode des directions alternantes.

Proposition 3.2 :

Supposons que l'hypothèse 3.1 tient.
Une suite $\{(x(t), z(t), p(t))\}$ générée par l'algorithme décrit par les équations (3.54)-(3.56) est bornée, et toute valeur d'adhérence de la suite $\{x(t)\}$ est une solution optimale du problème de départ (3.53).
De plus,
la suite $\{p(t)\}$ converge vers une solution optimale p^* du problème dual

$$\begin{aligned} &\text{maximiser}_p \qquad H_1(p) + H_2(p) \\ &\text{sous contrainte} \\ &\qquad\qquad\qquad p \in I\!R^m \end{aligned} \tag{3.57}$$

$$\begin{aligned} &\text{où } \ \forall\, p \in I\!R^m\ ,\ H_1(p) = \inf{}_{x \in C_1} \{G_1(x) + p'Ax\} \\ &\text{et } H_2(p) = \inf{}_{z \in C_2} \{G_2(z) - p'z\}\ . \end{aligned} \tag{3.58}$$

Dans la démonstration de la proposition, nous utilisons le lemme suivant.

Lemme 3.1 :

Si $y^* = \arg\min_{y \in Y} \{J_1(y) + J_2(y)\}$, où $J_1 : I\!R^n \to I\!R$ et $J_2 : I\!R^n \to I\!R$ sont des fonctions convexes, où J_2 est continûment différentiable et Y est un sous-ensemble polyédral de $I\!R^n$, alors :

$$y^* = \arg\min_{y \in Y} \{J_1(y) + \nabla J_2(y^*)'y\}\ .$$

Preuve du lemme :

Nous avons

$$(y^*, y^*) = \arg \min_{y \in Y, z \in I\!R^n, z = y} \{J_1(y) + J_2(z)\}\ .$$

Par le théorème des multiplicateurs de Lagrange B.3, il existe $\lambda \in I\!R^n$ tel que

$$y^* = \arg\min_{y\in Y}\{J_1(y) + \lambda' y\} \tag{3.59}$$

$$\text{et} \quad y^* = \arg\min_{z\in I\!R^n}\{J_2(z) - \lambda' z\}\,. \tag{3.60}$$

De l'équation (3.60), nous obtenons $\lambda = \nabla J_2(y^*)$. Le résultat suit en remplaçant λ' par sa valeur dans (3.59). ■

Preuve de la proposition

- Soit (x^*, z^*) une solution optimale du problème de départ (3.53), et soit p^* une solution optimale du problème dual (3.57).
  Montrons alors que $\{G_1(x(t+1)) + G_2(z(t+1))\}$ converge vers $G_1(x^*) + G_2(z^*)$.

  A cet effet, appliquons le lemme 3.1 avec les identifications $Y = C_1, J_1(x) = G_1(x)$, et $J_2(x) = p(t)'Ax + \frac{c}{2}||Ax - z(t)||_2^2$ (cfr équation (3.54)).
  Nous obtenons après calculs

$$\begin{aligned} &G_1(x(t+1)) + [p(t) + c(Ax(t+1) - z(t))]'Ax(t+1) \\ &\leq G_1(x) + [p(t) + c(Ax(t+1) - z(t))]'Ax, \ \forall\, x \in C_1\,. \end{aligned} \tag{3.61}$$

En considérant l'équation (3.55), nous avons de manière analogue

$$\begin{aligned} &G_2(z(t+1)) - [p(t) + c(Ax(t+1) - z(t+1))]'z(t+1) \\ &\leq G_2(z) - [p(t) + c(Ax(t+1) - z(t+1))]'z\,, \ \forall\, z \in C_2\,. \end{aligned} \tag{3.62}$$

En appliquant la relation (3.61) avec $x = x^*$ et la relation (3.62) avec $z = z^*$, et en utilisant également la formule de mise à jour des multiplicateurs (3.56), nous obtenons

$$\begin{aligned} &G_1(x(t+1)) + p(t+1)'Ax(t+1) + c(z(t+1) - z(t))'Ax(t+1) \\ &\leq G_1(x^*) + p(t+1)'Ax^* + c(z(t+1) - z(t))'Ax^* \\ \text{et} \quad &G_2(z(t+1)) - p(t+1)'z(t+1) \leq G_2(z^*) - p(t+1)'z^*\,. \end{aligned}$$

Additionnons ces deux relations et servons-nous du fait que $Ax^* = z^*$. Nous arrivons alors à l'inéquation suivante :

$$\begin{aligned}&G_1(x(t+1)) + G_2(z(t+1)) + p(t+1)'(Ax(t+1) - z(t+1))\\&+c(z(t+1) - z(t))'A(x(t+1) - x^*) \leq G_1(x^*) + G_2(z^*)\ .\end{aligned} \tag{3.63}$$

Par le théorème du point-selle B.5, nous devons avoir

$$G_1(x^*)+G_2(z^*) \leq G_1(x(t+1))+G_2(z(t+1))+p^{*'}(Ax(t+1)-z(t+1)),\ \forall\, t\ . \tag{3.64}$$

En additionnant les relations (3.63) et (3.64), nous obtenons

$$(p(t+1)-p^*)'(Ax(t+1)-z(t+1))+C(z(t+1)-z(t))'A(x(t+1)-x^*) \leq 0\ . \tag{3.65}$$

Notons maintenant $\forall\, t$,

$$\begin{aligned}\overline{x}(t) &= x(t) - x^*\\ \overline{z}(t) &= z(t) - z^*\\ \text{et}\quad \overline{p}(t) &= p(t) - p^*\ .\end{aligned}$$

Comme $Ax^* = z^*$, la formule de mise à jour des multiplicateurs (3.56) devient

$$\overline{p}(t+1) = \overline{p}(t) + c(A\overline{x}(t+1) - \overline{z}(t+1))$$

et

$$\overline{p}(t+1) = p(t) + c(Ax(t+1) - z(t+1))\ .$$

Servons-nous des relations précédentes pour réécrire l'inéquation (3.65).
Après avoir réarrangé les termes, nous obtenons

$$\begin{aligned}&\frac{1}{c}\overline{p}(t+1)'(\overline{p}(t+1) - \overline{p}(t)) + c(\overline{z}(t+1) - \overline{z}(t))'\overline{z}(t+1)\\&+(\overline{z}(t+1) - \overline{z}(t))'(\overline{p}(t+1) - \overline{p}(t)) \leq 0\ .\end{aligned} \tag{3.66}$$

Estimons chacun des trois termes de cette dernière relation. Nous avons

$$\begin{aligned}\overline{p}(t+1)'(\overline{p}(t+1)-\overline{p}(t)) &= \frac{1}{2}||\overline{p}(t+1)-\overline{p}(t)||_2^2 \\ &+ \frac{1}{2}||\overline{p}(t+1)||_2^2 - \frac{1}{2}||\overline{p}(t)||_2^2 \end{aligned} \quad (3.67)$$

et

$$\begin{aligned}(\overline{z}(t+1)-\overline{z}(t))'\overline{z}(t+1) &= \frac{1}{2}||\overline{z}(t+1)-\overline{z}(t)||_2^2 \\ &+ \frac{1}{2}||\overline{z}(t+1)||_2^2 - \frac{1}{2}||\overline{z}(t)||_2^2 \end{aligned} \quad (3.68)$$

Pour estimer le 3ème terme de la relation (3.66), nous considérons la relation d'optimalité (3.62) avec $z = z(t)$. Cela donne

$$G_2(z(t+1)) - p(t+1)'z(t+1) \leq G_2(z(t)) - p(t+1)'z(t) \ . \quad (3.69)$$

Considérons à nouveau la même relation, mais à l'itération t et avec $z = z(t+1)$. Nous obtenons

$$G_2(z(t)) - p(t)'z(t) \leq G_2(z(t+1)) - p(t)'z(t+1) \ . \quad (3.70)$$

L'addition de (3.69) et de (3.70) donne

$$0 \leq (z(t+1) - z(t))'(p(t+1) - p(t))$$

ou encore, de manière équivalente,

$$0 \leq (\overline{z}(t+1) - \overline{z}(t))'(\overline{p}(t+1) - \overline{p}(t)) \ . \quad (3.71)$$

Grâce aux relations (3.67), (3.68) et (3.71), nous pouvons écrire (3.66) sous la forme suivante

$$\begin{aligned}&||\overline{p}(t+1)-\overline{p}(t)||_2^2 + c^2||\overline{z}(t+1)-\overline{z}(t)||_2^2 \\ &\leq (||\overline{p}(t)||_2^2 + c^2||\overline{z}(t)||_2^2) - (||\overline{p}(t+1)||_2^2 + c^2||\overline{z}(t+1)||_2^2) \ .\end{aligned}$$

Cette relation montre que

$$\{||\overline{p}(t)||_2^2 + c^2||\overline{z}(t)||_2^2\} \tag{3.72}$$

est une suite décroissante et minorée par zéro.

Elle converge donc et

$$(||\overline{p}(t)||_2^2 + c^2||\overline{z}(t)||_2^2) - (||\overline{p}(t+1)||_2^2 + c^2||\overline{z}(t+1)||_2^2) \to 0 \; .$$

D'où,

$$||\overline{p}(t+1) - \overline{p}(t)||_2^2 + c^2||\overline{z}(t+1) - \overline{z}(t)||_2^2 \to 0 \; .$$

Il suit que

$$\begin{aligned} & \overline{p}(t+1) - \overline{p}(t) \to 0 \\ \text{et} \quad & \overline{z}(t+1) - \overline{z}(t) \to 0 \; . \end{aligned} \tag{3.73}$$

Finalement, puisque $\overline{p}(t+1) - \overline{p}(t) = c(Ax(t+1) - z(t+1))$, grâce aux relations (3.63) et (3.64), nous avons

$$\begin{aligned} \lim_{t\to\infty}[G_1(x(t+1)) + G_2(z(t+1))] &= G_1(x^*) + G_2(z^*) \\ &= \min_{x\in C_1, z\in C_2, Ax=z} \{G_1(x) + G_2(z)\} \; . \end{aligned}$$

- Soit $(\tilde{x}, \tilde{z})$ une valeur d'adhérence de la suite $\{(x(t), z(t))\}$. Nous avons que $A\tilde{x} = \tilde{z}$. Montrons que $\tilde{x}$ est une solution optimale du problème original (3.53).

Par définition de valeur d'adhérence,

$$\tilde{x} = \lim_{t\to\infty, t\in T} x(t) \text{ et } \tilde{z} = \lim_{t\to\infty, t\in T'} z(t) \; .$$

Or, G_1 et G_2 sont des fonctions continues car convexes (Prop. A.11).
D'où, $G_1(x(t)) + G_2(z(t)) \to G_1(\tilde{x}) + G_2(\tilde{z})$. Or nous avons montré que

$$G_1(x(t)) + G_2(z(t)) \to G_1(x^*) + G_2(z^*) \; .$$

La limite étant unique, nous concluons que

$$G_1(\tilde{x}) + G_2(\tilde{z}) = G_1(x^*) + G_2(z^*) .$$

Par conséquent, $\tilde{x}$ est une solution optimale du problème de départ (3.53).

- Montrons maintenant que la suite $\{(x(t), z(t), p(t))\}$ est bornée.

  Les suites $\{p(t)\}$ et $\{z(t)\}$ sont bornées car nous avons vu que $\{\overline{p}(t)\}$ et $\{\overline{z}(t)\}$ étaient bornées. De plus, nous avons par (3.56) et (3.73) que $||Ax(t) - z(t)||_2^2 \to 0$. L'hypothèse 3.1 étant satisfaite, il suit que $\{x(t)\}$ est aussi bornée.
  Par conséquent, la suite $\{(x(t), z(t), p(t))\}$ est bornée.

- La suite $\{(x(t), z(t), p(t))\}$ étant bornée, nous pouvons en extraire une sous-suite convergente, soit $\{(x(t), z(t), p(t))\}_{t \in T}$. Notons $(\tilde{x}, \tilde{z}, \tilde{p})$ sa limite. Nous avons déjà montré que $\tilde{x}$ est une solution optimale du problème (3.53).
  Montrons que $\tilde{p}$ est une solution optimale du problème dual (3.57).
  Pour cela, définissons $\hat{p}(t+1) = p(t) + c(Ax(t+1) - z(t))$.
  Par les définitions (3.58) et les relations (3.61) et (3.62), nous avons

$$\begin{aligned} H_1(\hat{p}(t+1)) &= G_1(x(t+1)) + \hat{p}(t+1)'Ax(t+1) \\ &\leq G_1(x) + \hat{p}(t+1)'Ax, \ \forall \ x \in C_1 \end{aligned} \tag{3.74}$$

et

$$\begin{aligned} H_2(p(t+1)) &= G_2(z(t+1)) - p(t+1)'z(t+1) \\ &\leq G_2(z) - p(t+1)'z \ , \ \ \forall \ z \in C_2 \ . \end{aligned} \tag{3.75}$$

Passons à la limite dans ces relations et utilisons le fait que $\tilde{p}$ est aussi la limite de la sous-suite $\{\hat{p}(t+1)\}_{t \in T}$. Nous obtenons

$$\lim \sup_{t \to \infty, t \in T} H_1(\hat{p}(t+1)) \leq G_1(x) + \tilde{p}'Ax, \ \forall \ x \in C_1$$

et

$$\lim \sup_{t \to \infty, t \in T} H_2(p(t+1)) \leq G_2(z) - \tilde{p}'z, \ \forall \ z \in C_2 \ .$$

Ainsi,

$$\limsup_{t\to\infty, t\in T} H_1(\hat{p}(t+1)) \leq H_1(\tilde{p})$$

$$\text{et} \tag{3.76}$$

$$\limsup_{t\to\infty, t\in T} H_2(p(t+1)) \leq H_2(\tilde{p}) \ .$$

D'autre part, comme $A\tilde{x} = \tilde{z}$, l'addition des relations (3.74) et (3.75) donne

$$\begin{aligned} &\lim_{t\to\infty, t\in T}[H_1(\hat{p}(t+1)) + H_2(p(t+1))] = G_1(\tilde{x}) + G_2(\tilde{z}) \\ &= \min_{x\in C_1, z\in C_2, Ax=z}\{G_1(x) + G_2(z)\} \ . \end{aligned} \tag{3.77}$$

Or, par le théorème de dualité B.4 nous avons

$$\max_{p\in I\!R^m}\{H_1(p) + H_2(p)\} = \min_{x\in C_1, z\in C_2, Ax=z}\{G_1(x) + G_2(z)\} \ .$$

Par conséquent, les relations (3.76) et (3.77) montrent que $\tilde{p}$ est une solution optimale de problème dual (3.57).

- Pour terminer, montrons que $\{(z(t), p(t))\}$ admet une seule valeur d'adhérence.

Remarquons que (3.72) dit que

$$\{||p(t) - p^*||_2^2 + c^2||z(t) - z^*||_2^2\} \tag{3.78}$$

est une suite décroissante et minorée par zéro, quel que soit le choix de solutions optimales (x^*, z^*) et p^* du problème primal (3.53) et du problème dual (3.57), respectivement.

En particulier, nous pouvons remplacer (z^*, p^*) dans (3.78) par toute valeur d'adhérence $(\tilde{z}, \tilde{p})$ de $\{(z(t), p(t))\}$.

Par définition de valeur d'adhérence, il existe une sous-suite de $\{(z(t), p(t))\}$, soit $\{(z(t), p(t))\}_{t\in T}$, qui converge vers $(\tilde{z}, \tilde{p})$.

Puisque la suite $\{||p(t)-\tilde{p}||_2^2+c^2||z(t)-\tilde{z}||_2^2\}$ est décroissante et minorée, elle converge. Or, une de ses sous-suites tend vers zéro. D'où, la suite elle-même tend vers zéro. Par conséquent, $\{p(t)\}$ converge vers $\tilde{p}$ et $\{z(t)\}$ converge vers $\tilde{z}$.

Il suit que $\{(z(t), p(t))\}$ ne peut admettre qu'une seule valeur d'adhérence.

En effet, si elle en avait une autre, disons $(\tilde{z}', \tilde{p}')$, nous aurions aussi la convergence de $\{p(t)\}$ et $\{z(t)\}$ vers $\tilde{p}'$ et $\tilde{z}'$, respectivement.
La limite étant unique, cela entraînerait que $(\tilde{z}', \tilde{p}') = (\tilde{z}, \tilde{p})$. ∎

Chapitre 4

Inéquations variationnelles

Dans ce chapitre, nous considérons le problème suivant.
Soient donnés un ensemble $X \subset I\!R^n$ et une fonction $f : I\!R^n \to I\!R^n$. Notre objectif est de trouver un vecteur $x^* \in X$ tel que

$$(x - x^*)' f(x^*) \geq 0 \,, \quad \forall\, x \in X \,. \tag{4.1}$$

Un tel problème est appelé un *problème d'inéquation variationnelle.* Nous le notons $VI(X, f)$, et nous supposons que X est convexe, fermé, et non vide.

4.1 Exemples de problèmes d'inéquation variationnelle

Nous pouvons écrire un certain nombre de problèmes intéressants sous la forme de problèmes d'inéquation variationnelle. En voici quelques exemples.

a) <u>Solution de systèmes d'équations</u>

Soit $X = I\!R^n$, et soit $f : I\!R^n \to I\!R^n$ une fonction donnée. Nous voyons facilement qu'un vecteur $x^* \in I\!R^n$ résout le problème $VI(I\!R^n, f)$ si et seulement si $f(x^*) = 0$.
En effet :
Si $f(x^*) = 0$, alors l'inéquation (4.1) tient avec égalité. Inversement, soit x^* satisfaisant (4.1) arbitraire, et prenons $x = x^* - f(x^*) \in I\!R^n$. (4.1) nous donne alors $-f(x^*)' f(x^*) \geq 0$, c'est-à-dire $-||f(x^*)||_2^2 \geq 0$, ce qui implique que $f(x^*) = 0$.

b) Optimisation sous contraintes et sans contrainte

Soit X un ensemble convexe, fermé et non vide, et soit $F : I\!R^n \to I\!R$ une fonction continûment différentiable.
Supposons que F est convexe sur X.
Grâce aux conditions d'optimalité pour l'optimisation convexe (Prop. 2.1 b)), nous avons qu'un vecteur $x^* \in X$ minimise F sur l'ensemble X si et seulement si $(x - x^*)'\nabla F(x^*) \geq 0 \ , \quad \forall \ x \in X$, autrement dit si et seulement si x^* résout le problème d'inéquation variationnelle $VI(X, \nabla F)$.

En particulier, si nous mettons $X = I\!R^n$, nous voyons que l'optimisation convexe sans contrainte est aussi un problème d'inéquation variationnelle.

Remarquons que dans notre contexte d'optimisation, la fonction f de l'inéquation (4.1) revêt une structure spéciale puisque c'est le gradient d'une fonction scalaire F. Ainsi, l'intégrale de f dépend uniquement des points de départ et d'arrivée de la trajectoire d'intégration, et pas du chemin parcouru.

c) Théorie des jeux et problèmes de point fixe

Définissons un *jeu de Nash* comme suit. Il y a m joueurs. Chaque joueur i choisit une stratégie x_i appartenant à un ensemble convexe et fermé $X_i \subset I\!R^{n_i}$. Alors, le ième joueur est pénalisé par une quantité égale à $F_i(x)$ ou $F_i(x_1, \cdots, x_m)$, où chaque $F_i : \Pi_{i=1}^m I\!R^{n_i} \to I\!R$ est une fonction continûment différentiable.

Nous disons qu'un ensemble $x^* = (x_1^*, \cdots, x_m^*) \in \Pi_{i=1}^m X_i$ de stratégies est *en équilibre* si aucun joueur n'est capable de réduire la pénalité encourue par une modification unilatérale de la stratégie choisie, c'es-à-dire mathématiquement, si

$$F_i(x_1^*, \cdots, x_{i-1}^*, x_i^*, x_{i+1}^*, \cdots, x_m^*) \leq F_i(x_1^*, \cdots, x_{i-1}^*, x_i, x_{i+1}^*, \cdots, x_m^*), \ \forall \ x_i \in X_i, \ \forall \ i \ .$$

Supposons que pour tout i, F_i est une fonction convexe de x_i sur l'ensemble X_i, lorsque les valeurs des autres composantes de x sont maintenues constantes.
En utilisant les conditions d'optimalité de la prop. 2.1 b), nous voyons qu'un ensemble de stratégies x^* est en équilibre si et seulement si

$$(x_i - x_i^*)' \nabla_i F_i(x^*) \geq 0 \ , \quad \forall \ x_i \in X_i \text{ et } \ \forall \ i \ ,$$

où $\nabla_i F_i(x^*)$ représente le vecteur (de longueur n_i) composé des dérivées partielles de F_i par rapport aux x_j, $j = 1, \cdots, n_i$, évaluées au point x^*.

L'addition de ces conditions nous permet de conclure que x^* doit être solution de l'inéquation variationnelle

$$(x - x^*)' f(x^*) \geq 0$$

où $f : \Pi_{i=1}^m I\!R^{n_i} \longrightarrow \Pi_{i=1}^m I\!R^{n_i}$ est donnée par

$$f(x) = (\nabla_1 F_1(x), \cdots, \nabla_m F_m(x)) \ .$$

En fait, l'inverse est vrai également. Toute solution de l'inéquation variationnelle précédente fournit un ensemble de stratégies en équilibre. (La prop. 4.7 démontrée dans la 5ème section permet de le voir).

Un problème apparenté est le problème du *point-selle*.
Nous disposons dans ce cas d'une fonction $F : X \times Y \longrightarrow I\!R$, et notre objectif est de trouver un couple $(x^*, y^*) \in X \times Y$ tel que

$$F(x^*, y) \leq F(x^*, y^*) \leq F(x, y^*) \ , \quad \forall \ x \in X, \ \forall \ y \in Y \ .$$

Le problème du point-selle est un cas particulier du jeu de Nash. Il suffit pour le voir de mettre $F_1 = F$ et $F_2 = -F$.
Les hypothèses de convexité sur les F_i émises dans le jeu de Nash s'adaptent à notre situation. Nous demandons que la fonction F soit convexe en x, lorsque y est fixé, et concave en y, lorsque x est fixé.

Une application importante du problème du point-selle apparaît dans la théorie de la dualité pour l'optimisation convexe sous contraintes.
Le théorème du point-selle (Théo. B.5) montre que nous pouvons trouver une solution primale x^* d'un problème d'optimisation et une solution p^* du problème dual correspondant, comme un point-selle de la fonction lagrangienne. Celle-ci est de la

forme $F(x, p)$, est convexe en x lorsque la valeur de p est maintenue constante, et concave en p lorsque la valeur de x est maintenue constante.
Il est donc possible d'approcher la solution d'un problème d'optimisation sous contraintes en considérant le problème du point-selle associé, et en appliquant par la suite les algorithmes présentés dans ce chapitre.

Dans certaines situations, quand le problème d'optimisation présente une structure séparable, nous pouvons soumettre le problème du point-selle à la décomposition et à la mise en parallèle.

4.2 Existence et unicité de la solution

Le résultat suivant donne une condition nécessaire et suffisante pour que le point x^* soit solution du problème $VI(X, f)$.

<u>**Proposition 4.1 :**</u> *(Caractérisation de point fixe des solutions)*

Soit γ un scalaire strictement positif, et soit G une matrice symétrique et définie positive. Alors :
Un vecteur $x^* \in X$ est solution du problème $VI(X, f)$ si et seulement si

$$[x^* - \gamma G^{-1} f(x^*)]_G^+ = x^* ,$$

où $[.]_G^+$ désigne la projection sur l'ensemble X par rapport à la norme $||x||_G = (x'Gx)^{1/2}$.

<u>**Preuve :**</u>
$\Leftarrow$: Supposons que $x^* = [x^* - \gamma G^{-1} f(x^*)]_G^+$.
Alors, le théorème de projection avec mise à échelle (Prop. 2.7 b)) nous donne

$$(x - x^*)'(-\gamma f(x^*)) \leq 0 , \quad \forall\, x \in X ,$$

et puisque γ est strictement positif, il suit que x^* résout $VI(X, f)$.

$\Rightarrow$: Supposons que x^* résout $VI(X, f)$ c'est-à-dire vérifie $(x - x^*)'f(x^*) \geq 0$, $\forall\, x \in X$, ou encore

$$(x - x^*)'G(x^* - (x^* - \gamma G^{-1} f(x^*))) \geq 0 , \quad \forall\, x \in X ,$$

car $\gamma > 0$ par hypothèse.
Alors, nous avons par la prop. 2.7 b) que $x^* = [x^* - \gamma G^{-1} f(x^*)]_G^+$. ∎

Pour un scalaire strictement positif γ fixé, et une matrice G symétrique et définie positive, soient les applications $R_G : X \to I\!R^n$ et $T_G : X \to X$, définies par

$$\begin{aligned} R_G(x) &= x - \gamma G^{-1} f(x) \\ \text{et} \quad T_G(x) &= [x - \gamma G^{-1} f(x)]_G^+ = [R_G(x)]_G^+ . \end{aligned}$$

Selon la prop. 4.1, résoudre l'inéquation variationnelle $VI(X, f)$ revient à trouver un point fixe de l'application T_G. Ceci va nous permettre d'utiliser les résultats liés au problème du point fixe développés dans le premier chapitre.

Démontrons les résultats d'existence et d'unicité suivants.

Proposition 4.2 : *(Existence)*

Supposons que l'ensemble X est compact et que l'application $f : I\!R^n \rightarrow I\!R^n$ est continue. Alors, l'inéquation variationnelle $VI(X, f)$ admet une solution.

Preuve :

Fixons un scalaire γ strictement positif et une matrice G symétrique et définie positive. Nous avons que R_G est continue car f l'est par hypothèse.
Or, la projection est continue (Prop. 2.2 c)). Par conséquent, T_G est continue.
Dès lors, nous pouvons appliquer le théorème du point fixe de Leray-Schauder-Tychonoff (Prop. 1.3), qui nous dit que T_G admet un point fixe.
Grâce à la prop. 4.1, nous savons que ce point fixe est solution de $VI(X, f)$. ∎

Proposition 4.3 : *(Existence et unicité)*

Supposons qu'il existe un scalaire γ strictement positif, une matrice G symétrique et définie positive, et $\alpha \in [0, 1)$ de telle sorte que l'application R_G satisfait

$$||R_G(x) - R_G(y)||_G \leq \alpha ||x - y||_G \ , \quad \forall \ x, y \in X \ .$$

(Autrement dit, R_G est une application contractante de module α).
Alors, le problème $VI(X, f)$ admet une unique solution.

Preuve :

La prop. 2.7 d) établit que la projection $[.]_G^+$ est non expansive par rapport à la norme $||x||_G = (x'Gx)^{1/2}$.
D'où,

$$||T_G(x) - T_G(y)||_G \leq ||R_G(x) - R_G(y)||_G, \ \forall \ x, y \in X \ .$$

Or, R_G est une contraction de module α par hypothèse. Par conséquent,

$$||T_G(x) - T_G(y)||_G \leq \alpha ||x - y||_G \ , \quad \forall \ x, y \in X \ .$$

T_G est donc une contraction par rapport à la norme $||.||_G$. Ceci entraîne que l'application T_G a un unique point fixe $x^* \in X$ (Prop. 1.1).
Par la prop. 4.1, x^* est l'unique solution de $VI(X, f)$. ∎

4.3 Algorithme de projection

Notre objectif étant de trouver un point fixe de l'application T_G, il est naturel d'employer l'itération suivante

$$x(t+1) = T_G(x(t)) = [x(t) - \gamma G^{-1} f(x(t))]_G^+ \ , \ t = 0, 1, \cdots \tag{4.2}$$

L'algorithme décrit par cette équation est appelé l'*algorithme de projection.*

Ici, G est une matrice symétrique et définie positive, et γ un scalaire strictement positif.

Remarque :

Dans le cas particulier où f est le gradient d'une fonction scalaire F, l'itération (4.2) de l'algorithme de projection est identique à celle de l'algorithme du gradient projeté avec mise à échelle de la section 2.3.

Si l'application T_G est une contraction, il est garanti que la méthode de projection converge. Cette condition est toujours vérifiée si R_G est une contraction par rapport à la norme $||.||_G$, car la projection est non expansive (Prop. 2.7 d)).

La proposition 1.6 spécialisée au cas d'un seul bloc de composantes fournit des conditions suffisantes pour que R_G soit une telle contraction. En particulier, nous obtenons le résultat suivant.

Proposition 4.4 : *(Convergence de l'algorithme de projection)*

Supposons que les hypothèses suivantes soient vérifiées.

a) *(Continuité de Lipschitz)*
Il existe une constante K telle que

$$||f(x) - f(y)||_2 \leq K||x - y||_2 \ , \quad \forall \ x, y \in X \ .$$

b) *(Monotonicité forte)*
Il existe une constante $\alpha > 0$ telle que

$$(x-y)'(f(x) - f(y)) \geq \alpha ||x - y||_2^2 \ , \quad \forall \ x, y \in X \ . \tag{4.3}$$

Soit G une matrice symétrique et définie positive.
Alors :
Il existe γ_0 strictement positif tel que $\forall\, \gamma \in (0, \gamma_0], T_g$ est une contraction par rapport à la norme $||.||_G$.

En particulier, le problème $VI(X, f)$ admet une unique solution, et pour $\gamma \in (0, \gamma_0]$, la suite $\{x(t)\}$ générée par l'algorithme de projection (4.2) converge linéairement vers cette solution.

Preuve :

Par la prop. 1.6 particularisée au cas d'un seul bloc de composantes, nous obtenons que R_G est une contraction par rapport à la norme $||.||_G$, lorsque $\gamma > 0$ est suffisamment petit.
Nous utilisons ensuite le fait que la projection est non expansive (Prop. 2.7 d)), pour conclure que T_G est aussi une contraction par rapport à la même norme.
Par conséquent, T_G admet un unique point fixe x^* (Prop. 1.1 a)), ce qui entraîne par la prop. 4.1 que le problème $VI(X, f)$ a une seule solution x^*.
Enfin, la partie b) du théorème de convergence des contractions (Prop. 1.1) nous dit que la suite générée par l'algorithme (4.2) converge linéairement vers cette solution. ∎

Si f est une fonction de la forme $f(x) = Ax + b$, alors la condition de monotonicité forte (4.3) devient

$$\exists \alpha > 0 \text{ tel que } (x-y)'A(x-y) \geq \alpha ||x-y||_2^2\,, \quad \forall\, x, y \in X$$

ou encore

$$\exists \alpha > 0 \text{ tel que } (x-y)'(A - \alpha I)(x-y) \geq 0\,, \quad \forall\, x, y \in X$$

ce qui est équivalent à $A - \alpha I$ semi-définie positive.
Il faut donc que la matrice A soit définie positive.

Envisageons un autre cas particulier.
Supposons que f est le gradient d'une fonction coût $F : I\!R^n \to I\!R$. La condition de monotonicité forte (4.3) s'écrit alors

$$\exists \alpha > 0 \text{ tel que } (x-y)'(\nabla F(x) - \nabla F(y)) \geq \alpha ||x-y||_2^2\,, \quad \forall\, x, y \in X\,,$$

ce qui signifie que F est fortement convexe sur l'ensemble X.
De plus, l'algorithme de projection (4.2) (avce pour G la matrice identité) devient identique

à l'algorithme du gradient projeté de la section 2.2, si X est un sous-ensemble convexe et fermé de $\mathbb{R}^n$.

Par conséquent, la prop. 4.4 établit la convergence linéaire de l'algorithme du gradient projeté dans le cas fortement convexe.

Nous reformulons maintenant la prop. 4.4 dans le cas où la fonction f est affine.

Proposition 4.5 : *(Convergence de l'algorithme de projection pour les problèmes linéaires)*

Supposons que $f(x) = Ax+b$, où A est une matrice définie positive (non nécessairement symétrique) de dimensions (n,n), et b un vecteur de longueur n.
Alors :
L'inéquation variationnelle $VI(X,f)$ admet une unique solution x^*, et quelle que soit la matrice G symétrique et définie positive, la suite générée par l'algorithme de projection $x(t+1) = T_G(x(t))$ converge linéairement vers x^*, pourvu que $\gamma > 0$ est suffisamment petit.

Preuve :

Nous avons

$$||f(x) - f(y)||_2 = ||Ax - Ay||_2 \leq ||A||_2||x-y||_2 \ , \quad \forall\ x,y \in X \ .$$

L'hypothèse a) de la prop. 4.4 est donc vérifiée avec $K = ||A||_2$. D'autre part,

$$(x-y)'(f(x) - f(y)) = (x-y)'A(x-y) \ , \quad \forall\ x,y \in X \ .$$

Or, un simple calcul montre que

$$(x-y)'A(x-y) = \frac{1}{2}(x-y)'(A+A')(x-y) \ , \quad \forall\ x,y \in X \ .$$

En outre,

$$\exists \alpha > 0 \text{ tel que } \frac{1}{2}(x-y)'(A+A')(x-y) \geq \alpha||x-y||_2^2 \ , \quad \forall\ x,y \in X$$

car $A + A'$ est symétrique et définie positive (Prop. A.3 b)).
Dès lors, la condition de monotonicité forte (4.3) tient. Par conséquent, le résultat suit de la prop. 4.4. ∎

Voyons une application de l'algorithme de projection à des problèmes d'optimisation sous contraintes.
Pour la simplicité, nous considérons uniquement le cas d'une fonction coût quadratique et de contraintes d'égalité de type linéaire, bien que la discussion suivante se généralise à des classes de problèmes plus larges.

Exemple 4.1 :

Considérons le problème d'optimisation suivant

$$\text{minimiser}_x \qquad \tfrac{1}{2}x'B'x$$

sous contrainte

$$Cx = b$$

où B et C sont des matrices données, respectivement de dimensions (n, n) et (m, n), et b un vecteur de longueur m donné.
Nous supposons que la matrice B est symétrique et définie positive.

Soit p le vecteur des multiplicateurs de Lagrange (de longueur m) associé à la contrainte d'égalité $Cx = b$.

La fonction lagrangienne s'écrit alors

$$L(x,p) = \frac{1}{2}x'B'x + p'(Cx - b) \, .$$

Soient $\nabla_x L$ et $\nabla_p L$ les vecteurs composés des dérivées partielles du Lagrangien par rapport aux composantes des vecteurs x et p, respectivement.
Nous avons

$$\begin{aligned} \nabla_x L(x,p) &= Bx + C'p \ \in I\!R^n \\ \text{et} \quad \nabla_p L(x,p) &= Cx - b \ \in I\!R^m \, . \end{aligned}$$

Comme discuté dans le problème du point-selle (exemple c) de la section 4.1), une approche possible pour résoudre le problème d'optimisation sous contraintes est de chercher un point-selle de la fonction L.

Ceci est équivalent à résoudre l'inéquation variationnelle $VI(X, f)$, où $X = I\!R^{n+m}$ et où $f : I\!R^{n+m} \to I\!R^{n+m}$ est donnée par

$$f(x,p) = \begin{pmatrix} \nabla_x L(x,p) \\ -\nabla_p L(x,p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Bx + C'p \\ -Cx + b \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} B & C \\ -C' & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}.$$

Voici l'algorithme de projection pour ce problème

$$\begin{aligned} x(t+1) &= x(t) - \gamma Bx(t) - \gamma C'p(t) \,, \\ p(t+1) &= p(t) + \gamma Cx(t) - \gamma b \,. \end{aligned}$$

Bien que la matrice B soit positive, la matrice

$$A = \begin{pmatrix} B & C \\ -C' & 0 \end{pmatrix}$$

ne l'est pas à cause du bloc nul dans le coin inférieur droit.
Pour cette raison, la condition de monotonicité forte (4.3) ne tient pas. Il n'est donc pas garanti que l'algorithme de projection converge.

Remarque :

Nous pourrions cependant montrer que dans notre exemple, la méthode de projection converge à condition que la matrice C soit de rang plein.

4.4 Algorithmes linéarisés

Soient x^0 un élément de X, γ un scalaire strictement positif et G une matrice symétrique et définie positive.
En utilisant le théorème de projection avec mise à échelle (Prop. 2.7 b)), nous avons que $T_G(x^0) = [x^0 - \gamma G^{-1} f(x^0)]_G^+$ peut être défini comme l'unique vecteur $x^1 \in X$ satisfaisant

$$(x - x^1)' G(x^1 - x^0 - \gamma G^{-1} f(x^0)) \geq 0 \;, \quad \forall\, x \in X$$

ou encore, de manière équivalente,

$$(x - x^1)'(f(x^0) + \mu G^{-1}(x^1 - x^0)) \geq 0 \;, \quad \forall\, x \in X \tag{4.4}$$

où $\mu = \frac{1}{\gamma}$, qui estr de nouveau une inéquation variationnelle.
En particulier, c'est le problème d'inéquation variationnelle $VI(X, g)$, où
$g(x) = f(x^0) + \mu G(x - x^0)$.

Ce problème est en général plus facile à résoudre que l'inéquation variationnelle de départ $VI(X, f)$, car la fonction g est linéaire en la variable x.

Donc, nous pouvons voir l'algorithme de projection comme une méthode qui résout une inéquation variationnelle par la résolution successive d'une suite d'inéquations variationnelles plus simples.

Sur base de cette observation, des choix distincts de l'inéquation variationnelle à résoudre à chaque itération fournissent une variété d'algorithmes différents.
Lorsque l'inéquation variationnelle résolue à chaque étape comporte une fonction linéaire, ces algorithmes sont appelés des *algorithmes linéarisés.*

Dans un algorithme linéarisé général, ayant évalué $x(t)$, nous calculons $x(t+1)$ en résolvant l'inéquation variationnelle $VI(X, g_t)$, où la fonction g_t a la forme

$$g_t(x) = f(x(t)) + A(x(t))(x - x(t)) \;.$$

Autrement dit, nous cherchons un vecteur $x(t+1)$ qui vérifie

$$(x - x(t+1))'(f(x(t)) + A(x(t))(x(t+1) - x(t))) \geq 0 \;, \quad \forall\, x \in X \;.$$

Ici, $A(x(t))$ est une matrice de mise à échelle définie positive (non nécessairement symétrique), qui dépend de $x(t)$.

Par la prop. 5.5, nous avons que l'inéquation variationnelle précédente admet une solution unique, et l'algorithme linéarisé est bien défini.

Différents choix de matrices de mise à échelle $A(x)$ donnent des algorithmes linéarisés différents. C'est pourquoi nous ferons référence à "l'algorithme linéarisé déterminé par $\{A(x)|x \in X\}$".

Aprè avoir fixé ces matrices de mise à échelle, un algorithme linéarisé peut s'écrire sous la forme

$$x(t+1) = T(x(t))$$

où nous définissons $T(x(t))$ comme l'unique élément de X satisfaisant

$$(y - T(x))'(f(x) + A(x)(T(x) - x)) \geq 0 \ , \quad \forall\, y \in X \ . \tag{4.5}$$

(N.B. Les dépendances en t sont omises afin de simplifier les écritures).

Prenons comme exemple $A(x) = \mu G$, $\forall\, x \in X$, où G est symétrique et définie positive, et $\mu > 0$. Nous obtenons dans ce cas d'inéquation variationnelle (4.4) et retrouvons l'algorithme de projection.

Considérons maintenant un problème d'optimisation sans contrainte, où f est le gradient d'une fonction coût F, c'est-à-dire $f(x) = \nabla F(x)$, et $X = I\!R^n$.
Dans ce cas, nous cherchons $T(x) \in I\!R^n$ tel que

$$(y - T(x))'(\nabla F(x) + A(x)(T(x) - x)) \geq 0 \ , \quad \forall\, y \in I\!R^n \ .$$

La solution de cette inéquation variationnelle est

$$T(x) = x - (A(x))^{-1} \nabla F(x) \ . \tag{4.6}$$

Dans ce contexte, nous aimerions que la matrice $A(x)$ soit une approximation de $\nabla^2 F(x) = \nabla f(x)$. Un choix courant est de prendre pour $A(x)$ une matrice diagonale dont ses éléments (non nuls) sont les éléments diagonaux de la matrice $\nabla f(x)$.

La proposition qui suit est un résultat général sur la convergence des algorithmes linéarisés, bien que ses hypothèses ne soient pas toujours faciles à vérifier.
La preuve est omise car c'est en fait un cas particulier de la prop. 5.8 que nous démontrerons

dans la prochaine section.

<u>**Proposition 4.6 :**</u> *(Convergence des algorithmes linéarisés)*

Supposons que l'inéquation variationnelle $VI(X, f)$ admet une solution x^*, et considérons l'algorithme linéarisé déterminé par $\{A(x)|x \in X\}$.
De plus, supposons qu'il existe une matrice G symétrique et définie positive, et un scalaire $\delta > 0$ tels que la matrice $A(x) - \delta G$ est semi-définie positive, $\forall\, x \in X$.
Supposons enfin qu'il existe $\alpha \in [0, 1)$ tel que

$$||G^{-1}(f(x) - f(y) - A(y)(x-y))||_G \leq \delta\alpha||x-y||_G\ , \quad \forall\, x, y \in X \tag{4.7}$$

où $||z||_G = (z'Gz)^{1/2}$.
Alors :
La suite $\{x(t)\}$ générée par l'algorithme linéarisé converge linéairement vers x^*, et x^* est l'unique solution de $VI(X, f)$.

Nous avons vu que dans la méthode de projection $A(x) = \mu G = G/\gamma\ ,\ \ \forall\, x \in X$.
Ainsi, si nous mettons $\delta = 1/\gamma$, alors $A(x) - \delta G = 0$ qui est une matrice semi-définie positive, $\forall\, x \in X$.

D'autre part, la condition (4.7) de cette proposition devient dans ce cas

$$\exists\alpha \in [0,1) \text{ tel que } \quad \begin{aligned} &||G^{-1}f(x) - G^{-1}f(y) - (G^{-1}\frac{G}{\gamma})(x-y)||_G \\ &\leq \delta\alpha||x-y||_G\ , \quad \forall\, x, y \in X \end{aligned}$$

c'est-à-dire, puisque $\delta > 0$,

$$\exists\alpha \in [0,1) \text{ tel que } \quad \begin{aligned} &||\gamma G^{-1}f(x) - \gamma G^{-1}f(y) - x + y||_G \\ &\leq \alpha||x-y||_G\ , \quad \forall\, x, y \in X \end{aligned}$$

ou encore

$$\exists\alpha \in [0,1) \text{ tel que } ||R_G(x) - R_G(y)||_G \leq \alpha||x-y||_G,\ \forall\, x, y \in X\ ,$$

ce qui signifie que l'application R_G, définie par $R_G(x) = x - \gamma G^{-1}f(x)$, est une contraction.

La prop. 4.6 généralise donc nos résultats précédents sur la convergence de la méthode de projection (Prop. 4.4).

4.5 Cas du produit cartésien : Implémentations en parallèle

A partir de maintenant, supposons que l'ensemble X se décompose en un produit cartésien $X = \Pi_{i=1}^{m} X_i$, où chaque X_i est de dimension n_i, et $\sum_{i=1}^{m} n_i = n$. Alors, tout vecteur $x \in X$ s'écrit $x = (x_1, x_2, \cdots, x_m)$, où chaque $x_i \in X_i$.
Nous supposons toujours que X est convexe, fermé et non vide. Les X_i vérifient donc aussi ces mêmes propriétés.

Notons que l'hypothèse du produit cartésien tient pour un certain nombre de problèmes importants tels que par exemple, la résolution de systèmes d'équations non linéaires en n variables ou le jeu de Nash (cfr exemple c) de la section 4.1).

Comme pour l'optimisation sous contraintes (cfr section 4.2), cette hypothèse fournit la possibilité d'utiliser des algorithmes en parallèle, comme nous le verrons dans la suite.

Dans le cas de notre ensemble produit, une inéquation variationnelle se décompose en m inéquations variationnelles de plus petites dimensions, comme le montre la proposition suivante.

Proposition 4.7 : *(Lemme de décomposition)*

Un vecteur $x^* \in X$ résout l'inéquation variationnelle $VI(X, f)$ si et seulement si

$$(x_i - x_i^*)' f_i(x_i^*) \geq 0 \ , \quad \forall\, x_i \in X_i, \ \forall\, i\, . \tag{4.8}$$

Preuve :

$\Leftarrow$: Supposons que l'inéquation (4.8) est satisfaite, $\forall\, i$.
Alors, l'addition de ces inéquations donne $(x - x^*)' f(x^*) \geq 0$, $\forall\, x \in X$.
Autrement dit, x^* résout $VI(X, f)$.

$\Rightarrow$: Supposons que $x^* \in X$ résout $VI(X, f)$. Soit $i \in \{1, \cdots, m\}$ arbitraire, et choisissons un vecteur x tel que $\forall\, j \neq i, x_j = x_j^*$, et $x_i \in X_i$. Grâce à l'hypothèse du produit cartésien, nous avons que $x \in X$.
D'où, $(x - x^*) f(x^*) \geq 0$, ce qui entraîne $(x_i - x_i^*)' f_i(x^*) \geq 0$.

Or, i est arbitraire. Par conséquent, la relation (4.8) est vérifiée. ∎

Considérons maintenant un algorithme linéarisé déterminé par une collection $\{A(x)|x \in X\}$ de matrices de mise à échelle. En général, un tel algorithme ne convient pas à l'implémentation en parallèle. Par exemple, dans le cas de l'optimisation sans contraintes (cfr équation (4.6)), un système d'équations linéaires doit être résolu à chaque étape, et nous ne pouvons pas décomposer facilement cette tâche en sous-problèmes indépendants.

Néanmoins, si la matrice $A(x)$ est bloc-diagonale quel que soit x, le ième bloc $A_i(x)$ étant de dimensions (n_i, n_i), le problème de départ se décompose alors naturellement en problèmes de plus petites dimensions, comme nous le montre ce qui suit.

Soit $T : X \longrightarrow X$ l'application décrivant une itération de l'algorithme linéarisé, c'est-à-dire $T(x)$ satisfait la relation (4.5). Sous l'hypothèse que $A(x)$ est bloc-diagonale, le ième bloc de composantes de la fonction $f(x)+A(x)(T(x)-x)$ est égal à $f_i(x)+A_i(x)(T_i(x)-x_i)$. En utilisant le lemme de décomposition (Prop. 4.7), nous concluons que $T_i(x)$ satisfait

$$(y_i - T_i(x))'(f_i(x) + A_i(x)(T_i(x) - x_i)) \geq 0 \ , \quad \forall\, y_i \in X_i \ . \tag{4.9}$$

Par conséquent, nous pouvons trouver chaque bloc $T_i(x)$ de composantes de $T(x)$ en résolvant une inéquation variationnelle de plus petite dimension. Ceci peut être fait de manière indépendante, quel que soit i. En particulier, chacune de ces plus petites inéquations variationnelles peut être résolue par un processeur différent. Par exemple, le ième processeur fournit les n_i composantes de $T_i(x)$, autrement dit le ième bloc de $T(x)$.

Revenons à l'analyse de convergence des algorithmes linéarisés.
Choisissons des matrices de mise à échelle $A(x)$, et supposons qu'elles sont bloc-diagonales. De plus, supposons que chaque bloc $A_i(x)$ est défini positif, pour tout x, ce qui garantit l'unicité de la solution de chaque sous-problème (4.9) (Prop. 4.5), et l'algorithme linéarisé est bien défini.

Le résultat suivant établit la convergence de l'itération $x := T(x)$, sous les hypothèses que X est un produit cartésien et que les matrices $A(x)$ sont bloc-diagonales.

Proposition 4.8 : *(Convergence des algorithmes linéarisés dans le cas du produit)*

Supposons que l'inéquation variationnelle $VI(X,f)$ admet une solution x^*.
De plus, supposons qu'il existe des matrices G_i symétriques et définies positives, et un scalaire $\delta > 0$ tels que la matrice $A_i(x) - \delta G_i$ est semi-définie positive, $\forall\ i$ et $\forall\ x \in X$.
Supposons enfin qu'il existe $\alpha \in [0,1)$ tel que

$$||G_i^{-1}(f_i(x) - f_i(y) - A_i(y)(x_i - y_i))||_i \le \delta\alpha \max_j ||x_j - y_j||_j\ , \quad \forall\ x, y \in X \tag{4.10}$$

où $||x_i||_i = (x_i' G_i x_i)^{1/2}$.
Alors :
L'application d'itération T de l'algorithme linéarisé déterminé par $\{A(x)|x \in X\}$ vérifie la propriété

$$||T_i(x) - x_i^*||_i \le \alpha \max_j ||x_j - x_j^*||_j\ , \quad \forall\ x \in X,\ i = 1, \cdots, m\ . \tag{4.11}$$

En particulier, x^* est l'unique solution de $VI(X,f)$ et la suite $\{x(t)\}$ générée par l'algorithme linéarisé $x(t+1) = T(x(t))$ converge linéairement vers x^*.

Preuve :

Soit $x \in X$ arbitraire, et soit i fixé.
Puisque $x_i^* \in X_i$, la relation (4.9) donne

$$(x_i^* - T_i(x))'(f_i(x) + A_i(x)(T_i(x) - x_i)) \ge 0\ . \tag{4.12}$$

Or, x^* résout $VI(X,f)$. D'où, nous avons grâce au lemme de décomposition (Prop. 4.7), que

$$(x_i - x_i^*) f_i(x_i^*) \ge 0\ , \quad \forall\ x_i \in X_i\ .$$

Ainsi,

$$(T_i(x) - x_i^*)' f_i(x_i^*) \ge 0\ . \tag{4.13}$$

Additionnons les relations (4.12) et (4.13). Après avoir réarrangé les termes, nous obtenons

$$\begin{aligned}&(T_i(x) - x_i^*)' A_i(x)(T_i(x) - x_i^*)\\ &\le (T_i(x) - x_i^*)'(f_i(x^*) - f_i(x) - A_i(x)(x_i^* - x_i))\ .\end{aligned} \tag{4.14}$$

Or, $(T_i(x) - x_i^*)'(A_i(x) - \delta G_i)(T_i(x) - x_i^*) \geq 0$ car $A_i(x) - \delta G_i$ est semi-définie positive par l'hypothèse. D'où, le membre de gauche de l'inéquation (4.14) est minoré par $\delta||T_i(x) - x_i^*||_2^2$.

En outre, le membre de droite de cette inéquation est égal à

$$
\begin{aligned}
&(T_i(x) - x_i^*)'G_i[G_i^{-1}(f_i(x^*) - f_i(x) - A_i(x)(x_i^* - x_i))] \\
&\leq ||T_i(x) - x_i^*||_i||G_i^{-1}(f_i(x^*) - f_i(x) - A_i(x)(x_i^* - x_i))||_i \\
&\qquad\qquad \text{par l'égalité de Schwartz} \\
&\leq ||T_i(x) - x_i^*||_i \delta\alpha \max_j ||x_j - x_j^*||_j \\
&\qquad\qquad \text{par l'hypothèse (4.10).}
\end{aligned}
$$

Donc, nous avons montré que

$$\delta||T_i(x) - x_i^*||_i^2 \leq ||T_i(x) - x_i^*||_i \delta\alpha \max_j ||x_j - x_j^*||_j \,.$$

Par conséquent, nous avons

$$||T_i(x) - x_i^*||_i \leq \alpha \max_j ||x_j - x_j^*||_j$$

c'est-à-dire que la relation (4.11) tient.
En particulier, T est une pseudocontraction (par rapport à la norme bloc-maximum $||x|| = \max_i ||x_i||$) admettant le point fixe x^*.
Le reste du résultat suit du théorème de convergence des itérations pseudocontractantes (Prop. 1.2). ∎

Remarque :

Cette preuver reste valable sous les hypothèses que $VI(X, f)$ admet une solution x^* et que la condition (4.10) tient lorsque $y = x^*$.
Cependant, x^* étant inconnu, cette hypothèse plus faible n'est habituellement pas plus facile à vérifier.

Dans le cas particulier où $A(x)$ est symétrique, définie positive, et indépendante de x, nous obtenons l'algorithme de peojection, et la proposition précédente peut être quelque peu renforcée. Notamment, il n'est pas nécessaire de supposer l'existence d'une solution x^*.

Proposition 4.9 :

Soient γ un scalaire strictement positif, $G_i, i = 1, \cdots, m$, des matrices symétriques et définies positives, et $||.||_i$ la norme définie par $||x||_i = (x'G_ix)^{1/2}$.
Supposons qu'il existe $\alpha \in [0, 1)$ tel que

$$||\gamma G_i^{-1}(f_i(x) - f_i(y)) - (x_i - y_i)||_i \leq \alpha \max_j ||x_j - y_j||_j \ , \quad \forall\, x, y \in X \ . \qquad (4.15)$$

Alors :
L'inéquation variationnelle $VI(X, f)$ admet une unique solution x^*.

En outre, soit G une matrice bloc-diagonale dont le ième bloc vaut G_i.
Alors :
La suite $\{x(t)\}$ générée par l'algorithme de projection $x(t+1) = [x(t) - \gamma G^{-1} f(x(t))]_G^+$ converge linéairement vers x^*.

Preuve :

La condition (4.15) établit que l'application $R_G(x) = x - \gamma G^{-1} f(x)$ est une contraction par rapport à la norme bloc-maximum $||x|| = \max_i ||x||_i$. Il suit que l'application $T_G = [x - \gamma G^{-1} f(x)]_G^+$ est aussi une contraction car la projection est non expansive (Prop. 2.7 d)).
D'où, T_G admet un point fixe (Prop. 1.1 a)). La prop. 4.1 montre alors que le problème $VI(X, f)$ admet une unique solution x^*. La convergence linéaire de l'algorithme de projection vers x^* suit du théorème de convergence des itérations contractantes (Prop. 1.1) ■

Remarque :

Les propositions 1.4 et 1.5 de la section 1.3 donnent des conditions suffisantes pour que la relation (4.15) tienne.

4.6 Méthodes de décomposition pour des inéquations variationnelles

Certaines techniques de décomposition, développées dans le 3ème chapitre pour des problèmes d'optimisation convexe soumis à des contraintes, s'étendent à des problèmes plus généraux d'inéquation variationnelle.

Envisageons d'abord un exemple.

Exemple 4.2 :

Reprenons le problème séparable de la section 3.4 (exemple 3.2), et considérons l'extension naturellle suivante.

Nous désirons trouver un vecteur $x^* = (x_1^*, x_2^*, \cdots, x_m^*)$ dans un ensemble produit $P_1 \times P_2 \times, \cdots \times P_m$, qui satisfait les contraintes linéaires

$$e_j' x^* = s_j \ , \ j = 1, \cdots, r$$

et résout l'inéquation variationnelle

$$\sum_{i=1}^{m} f_i(x_i^*)'(x_i - x_i^*) \geq 0 \ , \quad \forall \ x \in P_1 \times P_2 \times \cdots \times P_m \text{ tel que } e_j' x = s_j \ , \ j = 1, \cdots, r$$

où les x_i sont des sous-vecteurs de longueur n_i du vecteur x de longueur $n, \sum_{i=1}^{m} n_i = n$, les e_j sont des vecteurs de longueur n donnés, et les P_i sont des sous-ensembles polyédraux de $I\!R^{n_i}$ donnés.

Avec $f_i(x_i) = \nabla F_i(x_i)$, où $F_i : I\!R^{n_i} \rightarrow I\!R$ est une fonction convexe quel que soit i, nous obtenons un problème d'optimisation séparable.

Comme dans l'exemple 3.2, soient e_{ji} le sous-vecteur de e_j (de longueur n_i) qui correspond à x_i, $\ I(j) = \{i | e_{ji} \neq 0\}, j = 1, \cdots, r$, et m_j le cardinal de $I(j)$.

Dans l'itération de la méthode (des multiplicateurs) des directions alternantes (cfr équations (3.50)-(3.52)), nous obtenons, pour tout i, une solution $x_i(t+1) \in P_i$ de l'inéquation variationnelle

$$[f_i(x_i(t+1)) + \sum_{\{j|i\in I(j)\}} e_{ji}[\lambda_j(t) + c(e'_{ji}(x_i(t+1) - x_i(t))$$
$$+w_j(t))]]'(x_i - x_i(t+1)) \geq 0 \ , \quad \forall\ x_i \in P_i \tag{4.16}$$
$$\text{où } w_j(t) = \frac{1}{m_j}(e'_j x(r) - s_j) \ , \quad j = 1, \cdots, r \tag{4.17}$$

et où $\lambda_j(t)$ est mis à jour selon

$$\lambda_j(t+1) = \lambda_j(t) + cw_j(t+1) \ , \quad j = 1, \cdots, r \ . \tag{4.18}$$

Ici, les vecteurs initiaux $x(0)$ et $\lambda(0)$ sont arbitraires, et c est un nombre strictement positif.
Notons que cette méthode peut être fortement mise en parallèle.

Afin d'établir la validité de la méthode précédente, considérons le problème d'inéquation variationnelle qui consiste à trouver $x^* \in I\!R^n$ tel que $x^* \in C_1, Ax^* \in C_2$, et

$$f(x^*)'(x - x^*) \geq 0 \ , \quad \forall\ x \in C_1 \cap \{\xi | A\xi \in C_2\} \tag{4.19}$$

où A est une matrice de dimensions (m, n) donnée, C_1 et C_2 sont des sous-ensembles polyédraux non vides de $I\!R^n$ et $I\!R^m$, respectivement.

Une extension naturelle à la méthode des directions alternantes de la section 3.5 existe pour ce problème.

Dans l'itération typique de cette méthode (cfr équations (3.54)-(3.56)), nous obtenons $x(t+1)$ qui résout l'inéquation variationnelle

$$[f(x(t+1)) + A'[p(t) + c(Ax(t+1) - z(t))]]'(x - x(t+1)) \geq 0 \ , \quad \forall\ x \in C_1 \tag{4.20}$$

et nous mettons à jour les vecteurs (de longueur m) $z(t)$ et $p(t)$ selon

$$z(t+1) = \arg\min_{z\in C_2}\{-p(t)'z + \frac{c}{2}||Ax(t+1) - z||_2^2\} \ , \tag{4.21}$$
$$p(t+1) = p(t) + c(Ax(t+1) - z(t+1)) \ . \tag{4.22}$$

Les vecteurs initiaux $z(0)$ et $p(0)$ sont arbitraires, tandis que C est un paramètre strictement positif.

Remarque :

Comme dans la section 3.5, la méthode (4.16)-(4.18) est un cas particulier de la méthode (4.20)-(4.22). Elle s'obtient avec pour choix d'identifications :

$$f(x) = \sum_{i=1}^{m} f_i(x_i) \ , \ C_1 = P_1 \times P_2 \times \cdots \times P_m \ ,$$
$$C_2 = \{z | \sum_{i \in I(j)} z_{ji} = s_j \ , \ j = 1, \cdots, r\} \ ,$$

et A est la matrice qui envoie x sur le vecteur dont les composantes sont les $e'_{ji}x_i$, $j = 1, \cdots, r, \ \ i \in I(j)$.

Nous faisons l'hypothèse suivante.

Hypothèse 4.1 :

a) L'ensemble X^* des solutions optimales du problème (4.19) est non vide.

b) La fonction f est Lipschitz continue et monotone, autrement dit :
Il existe une constante K telle que

$$\|f(x) - f(y)\|_2 \leq K\|x - y\|_2 \ , \quad \forall \ x, y \in C_2$$
$$\text{et} \quad (x - y)'(f(x) - f(y)) \geq 0 \ , \quad \forall \ x, y \in C_1 \ .$$

c) Soit l'ensemble C_1 est borné, soit la matrice $A'A$ est inversible.

Sous l'hypothèse 4.1, il est possible de montrer que l'inéquation variationnelle (4.20) admet une solution $x(t+1)$.
En effet :
Si C_1 est borné, donc compact, l'existence d'une solution suit alors de la prop. 4.2. D'un autre côté, si $A'A$ est inversible, l'inéquation variationnelle (4.20) comporte une application fortement monotone car f est monotone et $A'A$ est définie positive. La prop. 4.4 montre alors l'existence et l'unicité de la solution.

Nous terminons par un résultat de convergence de la méthode décrite par les relations (4.20)-(4.22). Nous ne démontrons pas cette proposition car la preuve est fort semblable à celle de la prop. 3.2 du chapitre précédent.

Proposition 4.10 :

Supposons que l'hypothèse 4.1 tient.
Une suite $\{(x(t), z(t), p(t))\}$ générée par l'algorithme (4.20)-(4.22) est bornée, et toute valeur d'adhérence de la suite $\{x(t)\}$ est une solution optimale de l'inéquation variationnelle de départ (4.19).

Annexe A : Définitions et propriétés d'algèbre linéaire et d'analyse

Nous rappelons dans cette annexe des définitions, ainsi que des résultats d'algèbre linéaire et d'analyse utilisés dans les démonstrations.

Définition A.1 :

a) Une suite $\{x_k\}$ *converge* vers x si

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists K \quad \text{tel que } \forall\, k \geq K \quad ||x_k - x|| \leq \varepsilon\ .$$

b) Une suite $\{x_k\}$ *converge linéairement* vers x^* s'il existe des constantes $A \geq 0$ et $\alpha \in [0, 1)$ telles que $\forall\, k \quad ||x_k - x^*|| \leq A\alpha^k$.

c) Une suite $\{x_k\}$ est une *suite de Cauchy* si

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists K \text{ tel que } \quad \forall\, k, m \geq K \quad ||x_k - x_m|| \leq \varepsilon\ .$$

Proposition A.1 :

a) Une suite dans $I\!R^n$ est convergente si et seulement si elle est de Cauchy.

b) Une suite bornée dans $I\!R^n$ est convergente si et seulement si elle admet une seule valeur d'adhérence.

Proposition A.2 :

Un ensemble fermé contient la limite de toutes ses suites convergentes.

Proposition A.3 :

Soit G une matrice symétrique et définie positive de dimensions (n, n).
Pour tout $x \in I\!R^n$, soit $||x||_G = (x'Gx)^{1/2}$.
Alors :

a) Il existe des constantes $K_1 > 0$ et $K_2 > 0$ telles que

$$K_1 x'G^{-1}x \leq x'Gx \leq K_2 x'G^{-1}x\ , \quad \forall\, x \in I\!R^n\ .$$

b) Il existe $\alpha > 0$ tel que $x'Gx \geq \alpha ||x||_2^2$, $\forall\, x \in I\!R^n$.

<u>Définition A.2 :</u>

Soit C un sous-ensemble de $I\!R^n$.
C est *convexe* si

$$\forall\, x, y \in C \;,\;\; \forall\, \alpha \in [0,1] \;\;\; \alpha x + (1-\alpha) y \in C \,.$$

<u>Définition A.3 :</u>

Soit C un sous-ensemble de $I\!R^n$ et soit $f : C \to I\!R$.

a) f est convexe si

$$\begin{aligned} &\forall\, x, y \in C \;,\;\; \forall\, \alpha \in [0,1] \\ &f(\alpha x + (1-\alpha) y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y) \,. \end{aligned}$$

b) f est *concave* si $-f$ est convexe

c) f est *strictement convexe* si

$$\begin{aligned} &\forall\, x, y \in C, x \neq y \;,\;\; \forall\, \alpha \in (0,1) \\ &f(\alpha x + (1-\alpha) y) < \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y) \,. \end{aligned}$$

<u>Définition A.4 :</u>

a) Soit $f : I\!R^n \to I\!R$ différentiable et soit $x \in I\!R^n$.
Le *gradient* de f au point x, noté $\nabla f(x)$, est le vecteur colonne de longueur n dont la ième composante vaut $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$.

b) Soit $f : I\!R^n \to I\!R$ deux fois différentiable et soit $x \in I\!R^n$.
La *matrice hesienne* de f au point x, notée $\nabla^2 f(x)$, est la matrice symétrique de dimensions (n, n) dont l'élément placé en ième ligne et jème colonne vaut $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)$.

c) Soit $f : I\!R^n \to I\!R^m$ différentiable et soit $x \in I\!R^n$.
Soit $\nabla f(x)$ la matrice de dimensions (n, m) dont la ième colonne est le gradient $\nabla f_i(x)$ de f_i c'est-à-dire $\nabla f(x) = (\nabla f_1(x) \cdots \nabla f_m(x))$. La *matrice jacobienne* de f au point x est la transposée de $\nabla f(x)$.

Définition A.5 :

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et soit $x \in \mathbb{R}^n$.

a) $\forall\ y \in \mathbb{R}^n\ f'(x;y) = \lim_{\alpha \searrow 0} \frac{f(x+\alpha y)-f(x)}{\alpha}$ est appelé la *dérivée directionnelle* de f au point x dans la direction y (pourvu que la limite existe).
Note : $\forall\ y \in \mathbb{R}^n\ ,\quad -f'(x;-y) \leq f'(x;y)$.

b) f est *différentiable* en x si toutes les dérivées directionnelles de f au point x existent, et si $f'(x;y)$ est une fonction linéaire de y.

Proposition A.4 :

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et soit $x \in \mathbb{R}^n$. Alors, f est différentiable en x si et seulement si $\nabla f(x)$ existe et satisfait $y'\nabla f(x) = f'(x;y)$, $\forall\ y \in \mathbb{R}^n$.

Définition A.6 :

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.
f est *continûment différentiable* si $\forall\ x \in \mathbb{R}^n, \nabla f(x)$ existe et est une fonction continue de x.

Proposition A.5 :

Soit C un sous-ensemble convexe de $\mathbb{R}^n$ et soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ différentiable. Alors :
f est convexe sur C si et seulement si

$$f(y) \geq f(x) + (y-x)'\nabla f(x)\ , \quad \forall\ x,y \in C\ .$$

Proposition A.6 :

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, deux fois continûment différentiable, et soit A une matrice réelle symétrique de dimensions (n,m). Nous avons :

a) f est convexe si et seulement si $\nabla^2 f(x)$ est semi-définie positive $\forall\ x$.

b) Si $\nabla^2 f(x)$ est définie positive $\forall\ x$, alors f est strictement convexe.

c) La fonction $f(x) = x'Ax$ est convexe si et seulement si A est semi-définie positive.

d) La fonction $f(x) = x'Ax$ est strictement convexe si et seulement si A est définie positive.
En particulier, $||x||_2^2 = x'Ix$ est strictement convexe.

Proposition A.7 :

Soit C un sous-ensemble convexe de $I\!R^n$.
Si $f : C \rightarrow I\!R$ est strictement convexe, alors f admet au plus un minimum.

Proposition A.8 : *(Lemme de descente)*

Si $f : I\!R^n \rightarrow I\!R$ est continûment différentiable et vérifie la propriété

$$||\nabla f(x) - \nabla f(y)||_2 \leq K||x - y||_2 \ , \ \forall \ x, y \in I\!R^n \ ,$$

alors :

$$f(x + y) \leq f(x) + y'\nabla f(x) + \frac{K}{2}||y||_2^2 \ .$$

Proposition A.9 :

Soit $f : I\!R^n \rightarrow I\!R$ continûment différentiable, et soit α une constante strictement positive. Si f satisfait la condition

$$(\nabla f(x) - \nabla f(y))'(x - y) \geq \alpha||x - y||_2^2 \ , \quad \forall \ x, y \in I\!R^n \ ,$$

alors f est strictement convexe.

Propositio, A.10 :

Soit $f : I\!R^n \rightarrow I\!R$ différentiable et convexe. Nous avons :
$\nabla f(x) = 0$ si et seulement si x est un minimum de f.

Proposition A.11 :

Soit $f : I\!R^n \rightarrow I\!R$.
Si f est convexe, alors f est continue.

Proposition A.12 :

Soit $f : I\!R^n \rightarrow I\!R$ convexe et différentiable en tout point $x \in I\!R^n$.
Alors, son gradient $\nabla f(x)$ est une fonction continue de x.

Annexe B : Quelques rappels sur la théorie de la dualité

Dans cette annexe, nous mentionnons quelques définitions élémentaires ainsi que les théorèmes concernant la dualité utilisés dans le chapitre sur la décomposition de problèmes d'optimisation.

Considérons le problème suivant :

$$\begin{array}{ll} \text{minimiser}_x & F(x) \\ \text{sous contraintes} & \\ & g_i(x) \leq 0 \ , \ i = 1, \cdots, m \\ & h_j(x) = 0 \ , \ j = 1, \cdots, p \\ & x \in P \end{array} \qquad (P)$$

où $F : I\!R^n \to I\!R$ est une fonction convexe, les $g_i : I\!R^n \to I\!R$ sont des fonctions convexes, les $h_j : I\!R^n \to I\!R$ sont des fonctions linéaires (affines), et P est un sous-ensemble polyédral, borné et non vide de $I\!R^n$.

- Un vecteur x qui satisfait les contraintes du problème (P) est appelé un vecteur *(primal) admissible*.
  Si un tel x existe, le problème (P) est *admissible*.

- La *fonction Lagrangienne* L (ou le Lagrangien) de (P) est donnée par

  $$L(x, u, v) = F(x) + \sum_{i=1}^{m} u_i g_i(x) + \sum_{j=1}^{p} v_j h_j(x) \ ,$$

  où $u = (u_1, \cdots, u_m) \geq 0$ et $v = (v_1, \cdots, v_p)$ sont les vecteurs des *multiplicateurs de Lagrange* associés respectivemrnt aux contraintes $g_i(x) \leq 0 \ , \ i = 1, \cdots, m$ et $h_j(x) = 0 \ , \ j = 1, \cdots, p$.

- La *fonction duale* est définie par

  $$q(u, v) = \inf_{x \in P} L(x, u, v)$$

- Le *problème dual* du problème (P) s'écrit

$$\begin{array}{ll} \text{maximiser}_{u,v} & q(u,v) \\ \text{sous contraintes} & \qquad\qquad\qquad (D) \\ & u \in I\!R^m \\ & u \geq 0 \\ & v \in I\!R^p \end{array}$$

- La fonction duale q est concave.

Théorème B.1 :

Si $F : I\!R^n \to I\!R$ est strictement convexe, si les $g_i : I\!R^n \to I\!R$ sont convexes, et si les $h_j : I\!R^n \to I\!R$ sont affines, alors :
La fonction lagrangienne $L(., u, v)$ est strictement convexe.
Il y a un seul minimum sur P.

Théorème B.2 : *(Théorème de différentiabilité)*

Notons $P(u, v) = \{y |\ y \text{ minimise } L(., u, v) \text{ sur } P\}$.
Supposons que P est fermé, borné et non vide, et que $F : I\!R^n \to I\!R$, $g_i : I\!R^n \to I\!R$, $i = 1, \cdots, m$, et $h_j : I\!R^n \to I\!R$, $j = 1, \cdots, p$, sont continues.
Nous avons :
Si $P(u, v) = \{x^*\}$, alors la fonction duale q est différentiable au point (u, v) et

$$\nabla q(u,v) = \begin{pmatrix} g_1(x^*) \\ g_2(x^*) \\ \vdots \\ g_m(x^*) \end{pmatrix}.$$

Remarque :

Des théorèmes B.1 et B.2, nous déduisons que la stricte convexité de la fonction primale implique la différentiabilité de la fonction duale.

Théorème B.3 : *(Théorème des multiplicateurs de Lagrange)*

Un vecteur x^* est une solution optimale du problème (P) si et seulement si x^* est admissible et il existe des vecteurs $u^* = (u_1^*, \cdots, u_m^*)$ où $u^* \geq 0$, et $v^* = (v_1^*, \cdots, v_p^*)$ tels que

$$F(x^*) = L(x^*, u^*, v^*) = \min_{x \in P} L(x, u^*, v^*) \ ,$$
$$u_i^* = 0 \ , \quad \forall \ i \text{ tel que } g_i(x) < 0 \ .$$

Théorème B.4 : *(Théorème de dualité)*

a) Si le problème primal (P) admet une solution, alors le problème dual (D) admet aussi une solution, et à l'optimalité les deux valeurs sont égales.

b) Supposons les problèmes (P) et (D) admissibles.
Alors :
x^* est une solution optimale de (P) et (u^*, v^*) est une solution optimale de (D) si et seulement si

$$F(x^*) = L(x^*, u^*, v^*) = \min_{x \in P} L(x, u^*, v^*) \ .$$

Théorème B.5 : *(Théorème du point-selle)*

Supposons les problèmes (P) et (D) admissibles.
Alors :
x^* est une solution optimale du problème promal (P) et (u^*, v^*) est une solution optimale du problème dual (D) si et seulement si

$$L(x^*, u, v) \leq L(x^*, u^*, v^*) \leq L(x, u^*, v^*) \ , \quad \forall \ x \in P, u \in I\!R^m \text{ où } u \geq 0, v \in I\!R^p \ .$$